

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ ПРИ ДВУХ УРОВНЯХ СПРОСА

С. Д. БЕЛОГОЛОВЦЕВ

(Иваново)

Задачу оптимального управления запасами можно сформулировать следующим образом. Пусть x — первоначальный уровень запасов товара на складе. Спрос на этот товар осуществляется через равные промежутки времени и в момент $i = 1, 2, \dots$, является неотрицательной случайной величиной ξ_i ; случайные величины ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, независимы и одинаково распределены с функцией распределения $\Phi(s)$ и конечным математическим ожиданием.

Перед поступлением i -го требования для пополнения склада делается заказ размера z_i стоимости $k(z_i)$, который доставляется немедленно. Неудовлетворенные требования ждут пополнения склада, т. е. допускается отрицательный уровень запасов. За недостающую для удовлетворения очередного требования партию товара размера y берется штраф $p(y)$, а за хранение такой же партии в течение одного периода — плата $h(y)$. Предполагается, что

$$k(z) = \begin{cases} kz, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$p(y) = \begin{cases} py, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} hy, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

где $k > 0$, $p > 0$, $h \geq 0$. Через $f_n(x)$ обозначаются минимальные средние издержки за n периодов процесса, начавшегося с уровня x . Имеет место основное в теории оптимального управления запасами рекуррентное соотношение

$$f_n(x) = -kx + \min_{y \geq x} \left[ky + p \int_y^{\infty} (s - y) d\Phi(s) + \right. \\ \left. + h \int_0^y (y - s) d\Phi(s) + \int_0^{\infty} f_{n-1}(y - s) d\Phi(s) \right], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $y = x + z$, $f_0(x) \equiv 0$.

Обозначим через $y_n(x)$ то значение y , при котором в правой части (1) достигается минимум. Набор функций $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ называют оптимальным поведением в n -шаговом процессе с первоначальным уровнем запасов x . Величина $z_i(x) = y_i(x) - x$, $i = 1, 2, \dots, n$, показывает, каким должен быть размер партии, заказываемой в начале процесса, чтобы средние издержки за i последующих периодов были минимальны.

В [1, 2 и др.] с подобной постановкой задачи изучается оптимальное поведение в предположении, что функция распределения $\Phi(s)$ имеет плотность $\phi(s) > 0$ при $s > 0$. В этом случае невозможно получить наглядную картину изменения величин $y_n(x)$ с ростом n .

Настоящая статья посвящена решению задачи оптимального управления запасами при двух возможных уровнях спроса, предложенной в [3], т. е. исследуется оптимальное поведение, когда каждая из случайных величин ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, принимает только два значения: s_1 и s_2 (низкий и высокий уровни спроса) соответственно с вероятностями p_1 и p_2 , где $0 \leq s_1 < s_2$ и $p_1 + p_2 = 1$. Эта задача имеет и практический интерес, например когда случайная величина спроса имеет лишь одно положительное значение, т. е. определенное требование на товар в каждый момент может поступить или не поступить с некоторой вероятностью.

Теперь основное соотношение (1) примет вид

$$f_n(x) = -kx + \min_{y \geq x} [ky + L(y) + p_1 f_{n-1}(y - s_1) + p_2 f_{n-1}(y - s_2)], \quad (2)$$

$$\text{где} \quad L(y) = \begin{cases} p_1 p (s_1 - y) + p_2 p (s_2 - y), & y \leq s_1, \\ p_1 h (y - s_1) + p_2 p (s_2 - y), & s_1 < y \leq s_2, \\ p_1 h (y - s_1) + p_2 h (y - s_2), & y > s_2. \end{cases} \quad (3)$$

В дальнейшем часто будут встречаться линейные функции на каждом из конечного числа смежных промежутков; естественно называть такие функции кусочно-линейными. Из (3) видно, что $L(y)$ является непрерывной кусочно-линейной функцией. Очевидно, непрерывная кусочно-линейная функция $f(x)$ имеет левую производную, которую будем обозначать обычным символом производной $f'(x)$; в этом случае функция $f'(x)$ будет кусочно-постоянной непрерывной слева.

Если непрерывная кусочно-линейная функция $f(x)$ постоянна на некотором промежутке, то условимся считать точкой минимума $f(x)$ на этом промежутке его левый конец. Прежде чем сформулировать первую теорему, потребуется определить некоторые числа. Если $s_1 > 0$, то

$$n_1 = \left\lfloor \frac{s_2}{s_1} \right\rfloor \quad (4)$$

(в дальнейшем выражение в квадратных скобках будет означать целую часть числа). Пусть

$$T(u) = \{p_2(k + p_1 p) - p_1^2 h\} p_1^{u-1} + p_1 h - p_2 p. \quad (5)$$

Если существует u_0 — корень уравнения $T(u) = 0$, то положим

$$n_2 = [u_0]. \quad (6)$$

Пусть теперь

$$n_0 = \begin{cases} \min(n_1, n_2), & s_1 > 0, \\ n_2, & s_1 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где n_1 и n_2 определяются соответственно формулами (4) и (6).

Теорема 1. Если $k - p < 0$ и $p_1 h - p_2 p < 0$, то

$$y_n(x) = \begin{cases} ns_1, & x \leq ns_1, \\ x, & x > ns_1 \end{cases}$$

для $n \leq n_0$ и

$$y_n(x) = \begin{cases} s_2, & x \leq s_2, \\ x, & x > s_2 \end{cases}$$

для $n > n_0$, где n_0 определяется формулой (7).

Доказательство. Отметим сначала, что функция $T(u)$, определенная равенством (5), в силу условий теоремы убывает и существует единственный корень уравнения $T(u) = 0$, так как $T(0) = (p_2 k / p_1) > 0$ и $\lim_{u \rightarrow +\infty} T(u) = p_1 h - p_2 p < 0$, поэтому $T(u) < 0$ для

$$n > n_2 \text{ и } T(u) \geq 0 \text{ для } n \leq n_2, \quad (8)$$

где n_2 определяется (6).

Доказательство теоремы будем проводить по индукции. Обозначим через $G_n(y)$ выражение, стоящее под знаком минимума в (2). Пусть $n = 1$, тогда $G_1(y) = ky + L(y)$ — непрерывная кусочно-линейная функция и

$$G_1'(y) = \begin{cases} k - p, & y \leq s_1, \\ k + p_1 h + p_2 p, & s_1 < y \leq s_2, \\ k + h, & y > s_2. \end{cases} \quad (9)$$

Предположим сначала, что $n_0 = 0$. Отсюда следует, что $n_2 = 0$, так как $n_1 \geq 1$. Принимая во внимание (8), получим $T(1) < 0$, т. е.

$$p_2(k + p_1 p) - p_1^2 h + p_1 h - p_2 p = p_2(k + p_1 h - p_2 p) < 0.$$

В (9) можно было записать, что $G_1'(y) = T(1) / p_2$ при $s_1 < y \leq s_2$, поэтому $G_1(y)$ убывает при $y \leq s_2$ и возрастает при $y > s_2$, т. е. при $y = s_2$ функция $G_1(y)$ имеет единственный минимум и, следовательно,

$$y_1(x) = \begin{cases} s_2, & x \leq s_2, \\ x, & x > s_2, \end{cases}$$

что согласуется с утверждением теоремы. Будем теперь считать, что $n_0 > 0$, т. е. $n_2 \geq 1$. В этом случае $T(1) \geq 0$ и значит $G_2'(y) \geq 0$, $y \geq s_1$. Тогда $G_1(y)$, $y = s_1$ имеет единственный в упомянутом выше смысле минимум и

$$y_1(x) = \begin{cases} s_1, & x \leq s_1, \\ x, & x > s_1; \end{cases}$$

функция

$$f_1(x) = \begin{cases} -kx + G_1(s_1), & x \leq s_1, \\ -kx + G_1(x), & x > s_1 \end{cases}$$

является непрерывной кусочно-линейной и

$$f_1'(x) = \begin{cases} -k, & x \leq s_1, \\ p_1 h - p_2 p, & s_1 < x \leq s_2, \\ h, & x > s_2; \end{cases}$$

$$f_1'(x) = \frac{T(1)}{p_2} - k, \quad s_1 < x \leq s_2, \text{ поэтому } f_1'(x) \geq -k \text{ при всех } x.$$

Предположим, что теорема справедлива для $i = 1, 2, \dots, n < n_0$, а также что $G_n(y)$ — непрерывная кусочно-линейная функция $G_n'(y) = T(n) / p_2$, $n s_1 < y \leq s_2$ и $f_n'(x) \geq -k$ при всех x .

Покажем, что все это имеет место при $i = n + 1$. В самом деле, функция

$$G_{n+1}(y) = G_1(y) + p_1 f_n(y - s_1) + p_2 f_n(y - s_2) \quad (10)$$

является непрерывной кусочно-линейной как линейная комбинация таких функций.

В силу предположения индукции

$$f'_n(x) = \begin{cases} -k & , \quad x \leq ns_1, \\ \frac{T(n)}{p_2} - k, & ns_1 < x \leq s_2. \end{cases} \quad (11)$$

Поэтому после дифференцирования обеих частей (10) с учетом (8) и (11) получаем

$$G'_{n+1}(y) = \begin{cases} -p, & y \leq s_1, \\ p_1h - p_2p, & s_1 < y \leq (n+1)s_1. \end{cases} \quad (12)$$

По условию $p_1h - p_2p < 0$, поэтому выражение (12) отрицательно. Из тех же соображений имеем

$$G'_{n+1}(y) = k + p_1h - p_2p + p_1 \left(\frac{T(n)}{p_2} - k \right) - p_2k, \quad (n+1)s_1 < y \leq s_2. \quad (13)$$

Простые преобразования в правой части (13) показывают, что $G'_{n+1}(y) = T(n+1)p_2$ при $(n+1)s_1 < y \leq s_2$. По предположению, $n+1 \leq n_0$ и, следовательно, $n+1 \leq n_2$, поэтому из (8) получаем, что $T(n+1) \geq 0$, т. е. $G'_{n+1}(y) \geq 0$ при $(n+1)s_1 < y \leq s_2$.

Так как $G'_1(y) \geq k$ при $y > s_2$ и $f_n(x) \geq -k$ при всех x , то из (10) следует, что $G_{n+1}(y) \geq 0$ при $y < s_2$. Итак, $G_{n+1}(y) < 0$ при $y \leq (n+1)s_1$ и $G_{n+1}(y) \geq 0$ при $y > (n+1)s_1$, т. е. $G_{n+1}(y)$ при $y = (n+1)s_1$ имеет минимум, и, следовательно, оптимальное поведение имеет требуемый вид. Функция

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} -kx + G_{n+1}[(n+1)s_1], & x \leq (n+1)s_1, \\ -kx + G_{n+1}(x), & x > (n+1)s_1 \end{cases}$$

также является непрерывной кусочно-линейной, и, очевидно, $f'_{n+1}(x) \geq -k$ при всех x .

Итак, доказано, что

$$y_n(x) = \begin{cases} ns_1, & x \leq ns_1 \\ x, & x > ns_1 \end{cases}$$

для $n \leq n_0$.

Пусть теперь $n = n_0 + 1$. Если $n_0 = n_1$, то

$$G_{n_1+1}(y) = \begin{cases} -p, & y \leq s_1 \\ p_1h - p_2p, & s_1 < y \leq s_2. \end{cases} \quad (14)$$

Если $n_0 = n_2 < n_1$, то

$$G'_{n_2+1}(y) = \begin{cases} -p, & y \leq s_1, \\ p_1h - p_2p, & s_1 < y \leq (n_2+1)s_1, \\ \frac{T(n_2+1)}{p_2}, & (n_2+1)s_1 < y \leq s_2. \end{cases} \quad (15)$$

По условию теоремы $p_1h - p_2p < 0$, а в силу неравенств (8) $T(n_2+1) < 0$, поэтому выражения (14), (15) отрицательны. Так как $G'_1(y) \geq k$ при $y > s_2$ и, по доказанному, $f'_{n_0}(x) \geq -k$ при всех x , то $G_{n_0+1}(y) \geq 0$ при $y > s_2$, т. е. $G_{n_0+1}(y)$ при $y = s_2$ имеет минимум и, следовательно,

$$y_{n_0+1}(x) = \begin{cases} s_2, & x \leq s_2, \\ x, & x > s_2. \end{cases}$$

По индукции легко можно проверить, что оптимальное поведение будет иметь тот же вид для всех $n > n_0$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Если $k - p < 0$ и $p_1 h - p_2 p \geq 0$, то

$$y_n(x) = \begin{cases} s_1, & x \leq s_1, \\ x, & x > s_1 \end{cases}$$

для $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Из условия теоремы и (9) следует, что $G_1(y)$ убывает при $y \leq s_1$ и возрастает при $y > s_1$, т. е. при $y = s_1$ функция $G_1(y)$ имеет единственный минимум. Следовательно,

$$y_1(x) = \begin{cases} s_1, & x \leq s_1, \\ x, & x > s_1. \end{cases}$$

Как и в теореме 1, $f_1'(x) \geq -k$ при всех x . Так как $G_1'(y) \geq k$, $y > s_1$, то, очевидно, $G_2(y)$ имеет минимум также при $y = s_1$, т. е. $y_2(x) = y_1(x)$. Легко можно показать, что оптимальное поведение будет иметь тот же вид для всех $n > 1$.

Пусть теперь $k - p \geq 0$. Положим

$$m = \left[\frac{k}{p} \right]. \quad (16)$$

Для каждого $n > m$ определим функцию

$$T_n(u) = \{p_2(k - mp) + p_1 p\} p_1^{n-m-1} + p_1 h - p_2 p - (p + h) p_1^{u+1}. \quad (17)$$

Предположим, что существует u_n — корень уравнения $T_n(u) = 0$. Введем возрастающую последовательность натуральных чисел r_n , $n = m, m+1, \dots$,

$$r_n = \begin{cases} r_{n-1} + 1, & u_n < r_{n-1} + 1, \\ [u_n] + 1, & u_n > r_{n-1} + 1; \quad u_n \neq [u_n], \\ u_n, & u_n \geq r_{n-1} + 1; \quad u_n \neq [u_n], \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{где } r_m = 0. \text{ Пусть } l_n = \begin{cases} \min(n, n_1), & s_1 > 0, \\ n, & s_1 = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{где } n_1 \text{ определяется (4) и } n^* = \max_{r_n \leq l_n} n. \quad (20)$$

Теорема 3. Если $k - p \geq 0$ и $p_1 h - p_2 p < 0$, то $y_n(x) = x$ для $n \leq m$,

$$y_n(x) = \begin{cases} r_n s_1, & x \leq r_n s_1, \\ x, & x > r_n s_1 \end{cases}$$

для $m < n \leq n^*$ и

$$y_n(x) = \begin{cases} s_2, & x \leq s_2, \\ x, & x > s_2 \end{cases}$$

для $n > n^*$, где m , r_n и n^* соответственно определяются (16), (18), (20).

Доказательство. Доказательство теоремы разобьем на три этапа.

I. $n \leq m$. Пусть $n = 1$. По условию теоремы (9) неотрицательно, поэтому $G_1(y)$ не убывает и $y_1(x) = x$. Отсюда $f_1(x) = L(x)$ и

$$f_1'(x) = \begin{cases} -p, & x \leq s_1, \\ p_1 h - p_2 p, & s_1 < x \leq s_2, \\ h, & x > s_2. \end{cases} \quad (21)$$

Очевидно $f_1'(x) \geq -p$ при всех x .

Пусть $m > 1$; для $i = 1, 2, \dots, n < m$ оптимальное поведение имеет требуемый вид, и $f_n'(x) \geq -np$ при всех x . Тогда

$$\begin{aligned} G_{n+1}'(y) &= k + f_1'(y) + p_1 f_n'(y - s_1) + p_2 f_n'(y - s_2) \geq \\ &\geq k - p - np \geq k - mp \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $G_{n+1}(y)$ не убывает и $y_{n+1}(x) = x$. Тогда

$$f'_{n+1}(x) = f'_1(x) + p_1 f'_n(x - s_1) + p_2 f'_n(x - s_2) \geq -(n+1)p. \quad (22)$$

Это соотношение показывает, что для $n \leq m$ имеем $f'_n(x) = -np$ при $x \leq s_1$ и $f'_n(x) \geq -k$ при всех x .

II. $m < n \leq n^*$. Рассмотрим последовательность промежутков $(-\infty; s_1], (s_1; 2s_1], \dots, (rs_1; (r+1)s_1], \dots, (l_n s_1; s_2]$, где l_n определяется (19). Функция $G'_n(y)$ постоянна на каждом из этих промежутков, ее значения обозначим соответственно $G'_{n,0}, G'_{n,r}, \dots, G'_{n,r}, \dots, G'_{n,l_n}$. Будем пока

считать, что $y \leq s_2$. Для $n = m+1$ имеем

$$G'_{m+1}(y) = k + f'_1(y) + p_1 f'_m(y - s_1) + p_2 f'_m(y - s_2) = k - p_2 p m + f'_1(y) + p_1 f'_m(y - s_1), \quad (23)$$

$$f'_m(y - s_1) = f'_1(y - s_1) + p_1 f'_{m-1}(y - 2s_1) + p_2 f'_{m-1}(y - s_2 - s_1) = -p_2 p (m-1) + f'_1(y - s_1) + p_1 f'_{m-1}(y - 2s_1). \quad (24)$$

Используя (24), можно записать (23) так

$$G'_{m+1}(y) = k - p_2 p m - p_1 p_2 p (m-1) + f'_1(y) + p_1 f'_1(y - s_1) + p_1^2 f'_{m-1}(y - 2s_1). \quad (25)$$

Это выражение запишется в общем виде, если продолжить этот процесс r раз, $i = 1, 2, \dots, l_{m+1}$

$$G'_{m+1}(y) = k - p_2 p \sum_{i=0}^{r-1} p_1^i (m-i) + \sum_{i=0}^{r-1} p_1^i f'_1(y - is_1) + p_1^r f'_{m-r+1}(y - rs_1). \quad (26)$$

Подставляя (21) в (26), получим

$$\begin{aligned} G'_{m+1,r} &= k - p_2 p \sum_{i=0}^{r-1} p_1^i (m-i) + (p_1 h - p_2 p) \sum_{i=0}^{r-1} p_1^i - p_1^r p (m-r+1) = \\ &= k + \{p_1 h - p_2 p (m+1)\} \sum_{i=0}^{r-1} p_1^i + p_1 p_2 p \sum_{i=1}^{r-1} i p_1^{i-1} - p_1^r p (m-r+1) = \\ &= k + \{p_1 h - p_2 p (m+1)\} \frac{1 - p_1^r}{1 - p_1} + p_1 p_2 p \frac{d}{dp_1} \left(\frac{p_1 - p_1^r}{1 - p_1} \right) - \\ &- p_1^r p (m-r+1) = \frac{p_2 (k - mp) + p_1 p + p_1 h - p_2 p - p_1^{r+1} (p + h)}{p^2}, \quad (27) \\ &r = 1, 2, \dots, l_{m+1}. \end{aligned}$$

Из (17) и (27) вытекает, что

$$G'_{m+1,r} = \frac{T_{m+1}(r)}{p_2}, \quad r = 0, 1, \dots, l_{m+1}. \quad (28)$$

Ясно, что $G'_{m+1,0} = k - (m+1)p < 0$, поэтому $G_{m+1}(y)$ убывает при $y \leq s_1$. Предположим, что $n^* = m$, т. е. $r_{m+1} > l_{m+1}$. Тогда из (18) следует, что $T_{m+1}(r) < 0$ при $r \leq l_{m+1}$. Из (28) видно, что $G_{m+1}(y)$ убывает при $y \leq s_2$. Как и раньше, можно показать, что $G_{m+1}(y)$ не убывает при $y > s_2$. В этом случае

$$y_{m+1}(x) = \begin{cases} s_2, & x \leq s_2, \\ x, & x > s_2. \end{cases}$$

Если $n^* > m$, то $r_{m+1} \leq l_{m+1}$. Из (18) и (28) заключаем, что $G_{m+1}(y)$ убывает при $y \leq r_{m+1}s_1$ и не убывает при $y > r_{m+1}s_1$, т. е. оптимальное поведение имеет вид

$$y_{m+1}(x) = \begin{cases} r_{m+1}s_1, & x \leq r_{m+1}s_1, \\ x, & x > r_{m+1}s_1. \end{cases}$$

Отсюда

$$f'_{m+1}(x) = \begin{cases} -k, & x \leq r_{m+1}s_1, \\ G'_{m+1}(x) - k, & x > r_{m+1}s_1, \end{cases}$$

т. е. $f'_{m+1}(x) \geq -k$ при всех x .

Пусть $n^* > m + 1$ и для $i = m + 1, m + 2, \dots, n < n^*$ теорема доказана; при этом предполагается, что

$$G'_{n,r} = \frac{T_n(r)}{p_2}, \quad r = r_n, r_n + 1, \dots, l_n. \quad (29)$$

Из (10) вытекает, что

$$G'_{n+1}(y) = \begin{cases} -p, & y \leq s_1, \\ p_1h - p_2p, & s_1 < y \leq (r_n + 1)s_1 \end{cases} \quad (30)$$

и

$$G'_{n+1,r} = k + p_1h - p_2p + p_1 \left(\frac{T_n(r-1)}{p_2} - k \right) - p_2k, \quad r = r_n + 1, \dots, l_{n+1}. \quad (31)$$

Простые преобразования правой части показывают, что

$$G'_{n+1,r} = \frac{T_{n+1}(r)}{p_2}, \quad r = r_n + 1, \dots, l_{n+1}. \quad (32)$$

Из (32) следует справедливость (29); так как (30) отрицательно, то $G_{n+1}(y)$ убывает при $y \leq (r_n + 1)s_1$. Если $u_{n+1} < r_n$, то (32) неотрицательно; поэтому $r_{n+1} = r_n + 1$ и $r_{n+1}s_1$ — точка минимума функции $G_{n+1}(y)$. Если же $u_{n+1} \geq r_n + 1$, то, определив r_{n+1} , как в (18), убеждаемся, что $r_{n+1}s_1$ также является точкой минимума функции $G_{n+1}(y)$, т. е. оптимальное поведение имеет требуемый вид. Простая проверка показывает, что $f'_{n+1}(x) \geq -k$ при всех x .

III. $n > n^*$. Пусть $n = n^* + 1$. Это значит, что либо u_{n^*+1} не существует (при этом $T_{n^*+1}(u) < 0$ при всех u), либо существует, но такое, что $u_{n^*+1} > l_{n^*+1}$. В том и другом случае $G_{n^*+1,r} < 0$, $r = 0, 1, \dots, l_{n^*+1}$. Очевидно, $G_{n^*+1}(y)$, $y = s_2$, имеет минимум. Теорема доказана.

Теорема 4. Если $k - p \geq 0$ и $p_1h - p_2p \geq 0$, то $y_n(x) = x$ для $n \leq m$

$$y_n(x) = \begin{cases} s_1, & x \leq s_1, \\ x, & x > s_1 \end{cases}$$

для $n > m$, где m определяется из (16).

Доказательство. В силу первого условия теоремы $G_n(y)$ не убывает для $n \leq m$ и, следовательно, $y_n(x) = x$; из второго условия $G'_1(y) > 0$ при $y > s_1$, а $f'_m(x) = -k$ при $x \leq s_1$ и $f'_m(x) \geq -k$ при всех x , поэтому $G_{m+1}(y)$ при $y = s_1$ имеет минимум, т. е.

$$y_{m+1}(x) = \begin{cases} s_1, & x \leq s_1, \\ x, & x > s_1. \end{cases}$$

Замечание. Условие $p_1h - p_2p \geq 0$, например, в теореме 2 означает, что либо издержки на хранение товара велики по сравнению со штрафом за неудовлетворенный спрос, либо вероятность высокого уровня спроса мала. В том и другом случае представляется естественным результат тео-

ремы 2: пополнить склад, чтобы удовлетворить лишь низкий уровень спроса, если первоначальный уровень запасов ниже его, или не пополнять, если первоначальный уровень запасов превышает его.

Будем теперь предполагать, что объем склада ограничен некоторой константой $H > 0$. Тогда (2) примет вид

$$f_n(x) = -kx + \min_{x \leq y \leq H} \{ky + L(y) + p_1 f_{n-1}(y - s_1) + p_2 f_{n-1}(y - s_2)\}. \quad (33)$$

Если $H \geq s_2$, то из (33) видно, что оптимальное поведение будет иметь тот же вид, что и в теоремах 1—4.

Если $H < s_2$, то

$$n'_0 = \begin{cases} \min \left\{ n_0 \left[\frac{H}{s_1} \right] \right\}, & s_1 > 0, \\ n_0, & s_1 = 0. \end{cases} \quad (34)$$

$$(n^*)' = \max_{r_n s_1 \leq H} n. \quad (35)$$

Теорема 1¹. Если $k - p < 0$ и $p_1 h - p_2 p < 0$, то

$$y_n(x) = \begin{cases} ns_1, & x \leq ns_1, \\ x, & x > ns_1 \end{cases} \text{ для } n \leq n'_0$$

и $y_n(x) = H$ для $n > n'_0$, где n'_0 определяется из (34).

Теорема 2¹. Если $k - p < 0$ и $p_1 h - p_2 p \geq 0$, то при $H \geq s_1$

$$y_n(x) = \begin{cases} s_1, & x \leq s_1, \\ x, & x > s_1 \end{cases} \text{ для } n = 1, 2, \dots$$

и при $H < s_1$, $y_n(x) = H$ для $n = 1, 2, \dots$

Теорема 3¹. Если $k - p \geq 0$ и $p_1 h - p_2 p \leq 0$, то $y_n(x) = x$ для $n \leq m$;

$$y_n(x) = \begin{cases} r_n s_1, & x \leq r_n s_1 \\ x, & x > r_n s_1 \end{cases} \text{ для } m < n \leq (n^*)';$$

$y_n(x) = H$ для $n > (n^*)'$, где m , r_n и $(n^*)'$ определяются соответственно (16), (18), (35).

Теорема 4¹. Если $k - p \geq 0$ и $p_1 h - p_2 p \geq 0$, то $y_n(x) = x$ для $n \leq m$; при $H \geq s_1$

$$y_n(x) = \begin{cases} s_1, & x \leq s_1, \\ x, & x > s_1 \end{cases}$$

для $n > m$ и при $H < s_1$ $y_n(x) = H$ для $n > m$, где m определяется (16).

При доказательстве теорем 1¹—4¹ можно применить те же рассуждения, что и в [2] для случая, когда объем склада ограничен.

Приношу глубокую благодарность Б. В. Гнеденко и Е. В. Булинской за очень внимательное отношение к моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Arrow, S. Karlin, H. Scarf. Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Stanford, 1958.
2. Е. В. Булинская. Некоторые задачи оптимального управления запасами. В сб. Теория вероятностей и ее применения. Т. 9, вып. 3. М., «Наука», 1964.
3. Р. Беллман. Динамическое программирование. И., Изд-во иностр. лит., 1960.

Поступила в редакцию
10 XII 1968