где $m^{(4)}$ — общее число семей, присоединившихся за четыре года; $K_{i\,1961}$ — число семей, относящихся к i-й группе душевого дохода в 1961 г., $i = 1, 2, \ldots, 8$.

На втором этапе интересующее нас распределение численности семей находится по формуле

$$\overset{*}{K}_{j1965} = K_{j1965}\alpha^{(4)}, \tag{10}$$

где $\alpha^{(4)}$ — коэффициент, характеризующий отношение численности семей с учетом возникших и исчезнувших семей к численности семей с учетом только возникших.

Этот коэффициент определяется

$$\alpha^{(4)} = \frac{n_1 + m^{(4)} - l^{(4)}}{n_1 + m^{(4)}}, \tag{11}$$

где n_1 — общее число обследованных семей в 1961 г.; $l^{(4)}$ — общее число исчезнувших из обследования семей за четыре года.

Полученные значения $K^*_{j\,1965}$ по формуле (10) представляют собой не что иное, как расчетное распределение семей рабочих и служащих по уровню душевого дохода за 1965 г. с учетом вновь возникших и исчезнувших семей.

Сравнение результатов описанных выше двух методов расчета показали, что во втором случае отклонения расчетных частостей от фактических значительно меньше. (Абсолютная величина отклонений в первом случае 34,0%, а во втором — 23,6%.) Близость расчетного распределения к фактическому, полученного вторым способом, наглядно видна на рисунке.

Напрашивается вывод о том, что использование «расширенной» матрицы переходных вероятностей при моделировании доходов с помощью однородных цепей Маркова является более эффективным.

В целом же, как показали результаты исследования, оба предлагаемые варианта моделирования доходов приемлемы и практически целесообразны прежде всего с аналитической точки зрения, хотя и другие стороны в решении данной задачи также представляют определенный интерес.

В заключение автор выражает глубокую благодарность кандидату физико-математических наук С. А. Айвазяну за советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Kordos. Zastosowanie lancuchow Markowa przy badaniu rozkladu dochodow ludnosci. Przeglad statystyczny, 1964, N 4.
2. S. Ferge. A jövedelemeloszlás időbeli alakulása. Statisztikai szemle, 1964, N 8—9.
3. З. Павловский. Введение в математическую статистику. М., «Статистика», 1967.
4. И. В. Дунин-Барковский, Н. В. Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. (Общая часть)., М., Гостехиздат, 1955.

Поступила в редакцию
3 I 1969

РЕШЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЕПОЛНОГО ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ

А. И. СОТСКОВ

(Москва)

Пользуясь понятием «расширенная система», рассмотрим следующую задачу. Найти решения X^S, $S = 1, 2, \ldots, t$, t систем линейных уравнений, X^S — Sn-мерных векторов; $Ax^S = b^S$, а также векторы y^S, $S = 1, 2, \ldots, t$, где $y^S = -Cx^S + D$; A — невырожденная матрица n-го порядка; b^S — векторы-столбцы известной матрицы B; C и D — известные матрицы размеров соответственно $(K \times n)$ и $(K \times S)$.

Практически такая система может найти широкое применение. Решение межотраслевых задач или задач балансовых моделей производства начинается с обращения матрицы $(E - a)$, где a — матрица коэффициентов прямых затрат.

Рассмотрим подобную задачу применительно к расширенному варианту.

Пусть имеется матрица $(E - a)$, обозначим ее буквой A, а также матрица C, определяющая затраты ресурсов на единицу изделий, не связанные с употреблением этих изделий «на себя».

Дан план производства товарной продукции завода на ряд плановых периодов, например на несколько месяцев; обозначим матрицу, которой определяется план, через B.

Матрица D отражает плановые ресурсы на те же плановые периоды.

Требуется определить производственную программу по всем плановым периодам, а также экономию или перерасход ресурсов в зависимости от плановых норм. Кроме того, необходимо в процессе вычислений получить матрицу CA^{-1}, которая является матрицей полных затрат ресурсов.

Поэтапно поставленную задачу можно решить следующим образом:

1) обратить матрицу A, получить матрицу коэффициентов полных затрат A^{-1};

2) матрицу коэффициентов полных затрат A^{-1} умножить на матрицу B и получить таким образом матрицу производственной программы

$$X = A^{-1}B; \tag{1}$$

3) умножить матрицу C на матрицу производственной программы X и определить матрицу фактического расхода ресурсов Y

$$Y = CX = CA^{-1}B; \tag{2}$$

4) вычесть из матрицы D матрицу Y и определить матрицу отклонений

$$\Delta = D - Y = D - CA^{-1}B; \tag{3}$$

5) умножить C на A^{-1} и получить матрицу

$$CA^{-1}. \tag{4}$$

Как видно из схемы вычислений, решение поставленной задачи на ЭВМ требует разработки нескольких специальных программ.

Для нахождения общего алгоритма решения всей задачи рассмотрим процесс обращения блочной матрицы при условии, что обращение будет не полным, т. е. будет остановлено на определенном этапе

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где A, B, C и D — матрицы-блоки соответствующих размеров, причем матрица A — квадратная, неособенная, так как является матрицей $(E - a)$ решаемой задачи.

Применим видоизмененный метод обращения Гаусса (схему единственного деления) с преобразованием матриц по столбцам-векторам [1].

По правилам обращения с блочными матрицами преобразуем блоки матрицы (5) по рекуррентным формулам, начиная с первого столбца.

1. Считая главным элементом A, находим

$$\bar{A} = EA^{-1} = A^{-1}. \tag{6}$$

2. Ниже расположеный в столбце элемент C преобразуем

$$\bar{C} = -CA^{-1}. \tag{7}$$

3. Преобразуем элемент B

$$\bar{B} = A^{-1}B. \tag{8}$$

4. Преобразуем элемент D

$$\bar{D} = D - CA^{-1}B. \tag{9}$$

Прервем на этом этапе обращение матрицы (5). Как видно из преобразования матрицы

$$\left(\begin{array}{c:c} A^{-1} & A^{-1}B \\ \hdashline -CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{array}\right), \tag{10}$$

нами получено искомое решение, удовлетворяющее сразу всем требованиям с помощью одного лишь алгоритма неполного обращения матрицы (5), скомпонованной из матриц — условий поставленной задачи.

Таким образом, процесс решения расширенной системы линейных уравнений заключается в обращении матрицы A с распространением процесса обращения на всю блочную матрицу, причем этот процесс следует прервать, как только будет получена матрица A^{-1}.

С отклонением от требований в нашем случае определена матрица $\bar{C} = -CA^{-1}$, однако матрица затрат ресурсов может быть введена в исходную (блочную) со знаком минус. При отсутствии плановых норм расхода ресурсов $D = 0$ соответствующий блок матрицы примет вид

$$\bar{D} = CA^{-1}B, \tag{11}$$

что в этой же задаче будет соответствовать требуемому расходу ресурсов на определенную нами производственную программу.

Целесообразность решения поставленной задачи предлагаемым методом очевидна. Основное преимущество заключается в систематизированном представлении материала при наличии одной программы обращения матриц и развитой подпрограммы выдачи материала на печать машины из различных мест матрицы, в результате чего резко сокращается подготовительно-заключительное время и увеличивается эффективность использования ЭВМ.

Анализ количества выполняемых арифметических операций показывает, что как последовательный процесс решения поставленной задачи, так и предлагаемый процесс имеет $2n^3 + 4n^2K + 2K^2n - 2n^2 + 2n - 2kn$ арифметических операций при равенстве соответствующих их видов. (Здесь для простоты вывода принят случай $K = t$.)

Описанный метод решения задачи не исключает введения в программу приемов уплотнения записи матриц с целью увеличения процента заполнения памяти ЭВМ при матрицах с большим количеством нулевых элементов.

Решение предлагаемой задачи можно осуществить также и с помощью метода Зейделя, в программу которого, однако, необходимо ввести дополнительные приемы, позволяющие решать задачу одновременно с несколькими векторами b и дополнительными уравнениями, определяющими y^s.

Как показывает анализ, «память» ЭВМ в этом случае используется менее эффективно на величину $n(t-1)$ ячеек (размеры программ здесь не сопоставляются), т. е. в любом случае при $(t > 1)$ предлагаемый способ будет эффективнее, что объясняется необходимостью сохранять в памяти кроме матриц A и B соответствующие промежуточные значения X.

Решение задачи линейного программирования и совместно нескольких систем линейных уравнений на ЭВМ с алгоритмом обращения матриц имеет место в практике программирования. Так, имеются программы решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса [2], позволяющие одновременно решать несколько систем уравнений, различающихся свободными членами.

Наш метод подобен модифицированному симплексному методу [1], в частности алгоритму преобразования искусственного базиса в базисное решение и преобразованию вектора ограничений B в решение системы. Преобразование коэффициентов функций цели симплексного метода C в оценки и минимизация ее предельного значения аналогичны преобразованию блоков C и D в матрице (5).

Метод решения расширенной системы линейных уравнений практически реализован на ЭВМ «Урал-3». С помощью программы, разработанной автором для $n < 150$ и использующей один магнитный барабан, решена задача расчета баланса металла предприятия по пятилетнему плану.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Гасс. Линейное программирование (Методы и приложения). М., Физматгиз, 1961.
2. Е. Т. Гавриленко. Автоматизация программирования и стандартные программы для вычислительных машин «Урал-2», «Урал-3» и «Урал-4». М., «Машиностроение», 1966.

Поступила в редакцию
20 XII 1967

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Н. ЦЫГАНКОВ

(Москва)

Наша цель — разработать рекомендации, позволяющие значительно уменьшить объем вычислительной работы при определении оптимального решения.

В [1, 2] используется алгоритм динамического программирования, предложенный в [3]. Для получения оптимального решения определяются доминирующие последовательности решения в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} D_1^* &= S(D^{(1)}), \\ D_2^* &= S(D^{(1)} + D^{(2)}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D^*_m &= S(D^*_{m-1} + D^{(m)}), \end{aligned} \qquad (1)$$