

между расчетными и заданными объемами отправления груза в каждом из этих пунктов отправления. Стоимости перевозки для фиктивных пунктов назначения поставлены так, как об этом сказано ранее.

Матрица решается любым из известных алгоритмов транспортной задачи линейного программирования с одним видом транспорта.

В качестве примера с помощью предлагаемого способа рассчитан оптимальный месячный план перевозок строительного кирпича. За критерий эффективности принят показатель приведенных строительно-эксплуатационных затрат. Методами линейного программирования были установлены два варианта оптимального плана: при изолированном рассмотрении перевозок на железнодорожном и автомобильном транспорте и при совмещенном их планировании с использованием предлагаемого метода. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Способы планирования перевозок	Затраты, тыс. руб.	Экономия от оптимизации	
		тыс. руб.	%
Фактически действующий	351	—	—
Оптимизация при изолированном рассмотрении перевозок на железной дороге и автотранспорте	341	10	2,9
Оптимизация при совмещенном планировании перевозок обоими видами транспорта	311	40	11,4

Эти данные свидетельствуют о том, что оптимизация плана перевозок одновременно для двух видов транспорта с помощью предлагаемого способа обеспечивает гораздо больший экономический эффект, чем оптимизация при разобъединенном планировании перевозок на каждом виде транспорта. Рекомендуемый алгоритм позволяет не только оптимально прикрепить поставщиков к потребителям, но и одновременно произвести распределение перевозок в каждой корреспонденции между видами транспорта. Прием сведения рассматриваемых задач к стандартной постановке транспортной задачи может быть использован и для одновременного решения транспортной задачи с более чем двумя видами транспорта при ограничениях их провозной способности.

Поступила в редакцию
22 II 1968

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДОЛИ ЛИЧНОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ В КОНЕЧНОМ ПРОДУКТЕ

П. М. ИЛЬЯГУЕВ

(Москва)

В данной работе рассматривается оценка коэффициента личного потребления на основе модели, предложенной в [1]. Используются статистические данные по США с 1896 по 1966 г. в ценах 1958 г. (см. Приложение).

Модель состоит из ряда макроэкономических показателей, определенных в момент времени t , а именно: конечного продукта $Y(t)$, личного потребления $C(t)$, валовых капиталовложений $X(t)$ и независимых расходов $R(t)$. Между этими показателями существуют зависимости, выражаемые системой уравнений

$$\begin{aligned} C(t) &= \alpha Y(t) + \beta + u(t), \\ Y(t) &= C(t) + X(t) - R(t), \\ R(t) &= \mu [C(t) + X(t)] + v + \omega(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где α — коэффициент личного потребления; β и v — некоторые постоянные, определяемые начальными условиями; μ — постоянная, характеризующая линейную зави-

связь между независимыми расходами $R(t)$ и суммой личного потребления $C(t)$ и валовых капиталовложений $X(t)$; $u(t)$ и $\omega(t)$ — случайные функции.

Задача состоит в получении оценок параметров α , β , ν , μ на основе анализа статистических рядов $X(t)$, $Y(t)$, $C(t)$.

На случайные функции $u(t)$ и $\omega(t)$ накладываются ограничения: 1) математическое ожидание равно нулю, т. е. $\varepsilon[u(t)] = 0$; $\varepsilon[\omega(t)] = 0$ и дисперсия $\varepsilon[u^2(t)] = \sigma^2_{u(t)}$; $\varepsilon[\omega^2(t)] = \sigma^2_{\omega(t)}$; 2) случайные функции являются некоррелированными величинами, т. е. $\varepsilon[u(t), u(t-\tau)] = 0$; $\varepsilon[\omega(t), \omega(t-\tau)] = 0$, $\varepsilon[u(t), \omega(t-\tau)] = 0$.

Уравнение (1) может быть разрешено относительно $C(t)$ и $Y(t)$

$$C(t) = \frac{\alpha(1-\mu)}{1-(1-\mu)\alpha} X(t) + \frac{\beta - \alpha\nu}{1-(1-\mu)\alpha} + \frac{u(t) - \alpha\omega(t)}{1-(1-\mu)\alpha}, \quad (2)$$

$$Y(t) = \frac{1-\mu}{1-(1-\mu)\alpha} X(t) - \frac{(1-\mu)\beta - \nu}{1-(1-\mu)\alpha} + \frac{(1-\mu)u(t) - \omega(t)}{1-(1-\mu)\alpha}. \quad (3)$$

При сделанных предположениях относительно $u(t)$ и $\omega(t)$ оценки имеют вид

$$\hat{A}_1 = \frac{m_{cx}}{m_{xx}} \quad \text{для} \quad \frac{\alpha(1-\mu)}{1-(1-\mu)\alpha}, \quad (4)$$

$$\hat{A}_2 = \frac{m_{yx}}{m_{xx}} \quad \text{для} \quad \frac{1-\mu}{1-(1-\mu)\alpha}, \quad (5)$$

$$\frac{m_{xx}m_c - m_{cx}m_x}{m_{xx}} \quad \text{для} \quad \frac{\beta - \alpha\nu}{1-(1-\mu)\alpha}. \quad (6)$$

$$\frac{m_{xx}m_y - m_{yx}m_x}{m_{xx}} \quad \text{для} \quad \frac{(1-\mu)\beta - \nu}{1-(1-\mu)\alpha}. \quad (7)$$

Уравнения (4)–(7) могут быть решены для получения оценок для α , β , μ , ν соответственно. Эти решения имеют вид

$$\hat{\alpha} = \frac{m_{cx}}{m_{yx}}, \quad (8)$$

$$\hat{\beta} = \frac{m_{yx}m_c - m_{cx}m_y}{m_{yx}}, \quad (9)$$

$$\hat{\mu} = 1 - \frac{m_{yx}}{m_{cx} + m_{xx}}, \quad (10)$$

$$\hat{\nu} = \frac{m_{yx}(m_c + m_x) - (m_{cx} + m_{xx})m_y}{m_{cx} + m_{xx}}. \quad (11)$$

Построим доверительную область для A_1 и A_2 ; с этой целью найдем оценки ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{12} для σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} соответственно

$$\rho_{11} = \frac{N}{N-2} \frac{m_{cc}m_{xx} - m_{cx}^2}{m_{xx}}, \quad (12)$$

$$\rho_{22} = \frac{N}{N-2} \frac{m_{yy}m_{xx} - m_{yx}^2}{m_{xx}}, \quad (13)$$

$$\rho_{12} = \frac{N}{N-2} \frac{m_{cy}m_{xx} - m_{cx}m_{yx}}{m_{xx}}, \quad (14)$$

где N — количество точек статистического ряда.

Статистика T^2 имеет вид

$$T^2 = Nm_{xx} \sum_{ij} \rho^{ij} (A_i - \hat{A}_i) (A_j - \hat{A}_j), \quad (15)$$

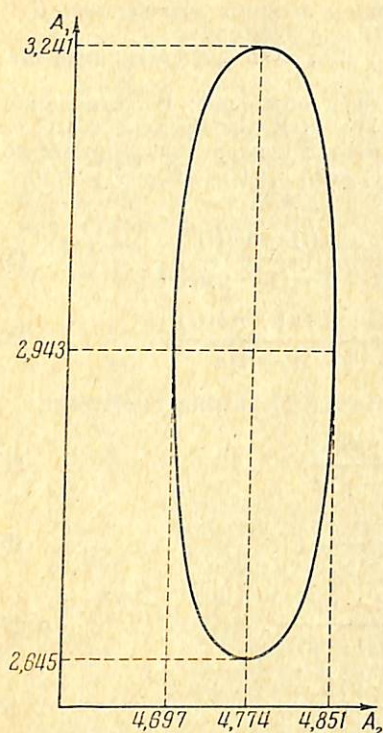


Рис. 1. Доверительная область для A_1 и A_2 с уровнем уверенности 5%

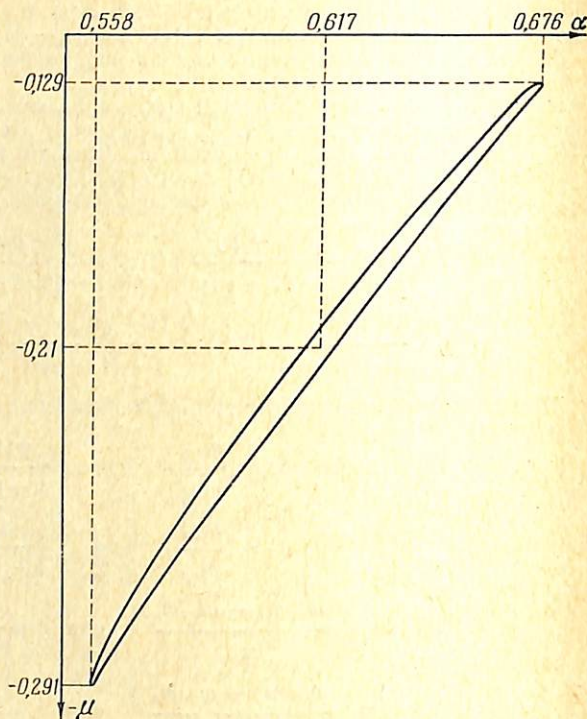


Рис. 2. Доверительная область для α и μ с уровнем уверенности 5%

где ρ^{ij} — обратная матрица для матрицы ρ_{ij} ; T^2 имеет F -распределение и вычисляется по формуле

$$T^2 = \frac{(N-1)P}{N-P} F_{p, N-P}, \quad (16)$$

где p — количество степеней свободы; в данном случае $p = 2$.

Подстановка (12) — (14) в (16) позволяет получить доверительную область A_1 и A_2 . Так как преобразование от A_1 и A_2 к α и μ является непрерывным, то доверительная область, полученная для A_1 и A_2 , приводит к соответствующей доверительной области для α и μ . Это преобразование имеет вид

$$\alpha = \frac{A_1}{A_2}, \quad (17)$$

$$\mu = 1 - \frac{A_2}{1 + A_1}. \quad (18)$$

Для нахождения конкретных значений оценок параметров модели на основе статистических рядов для Y , X , C (см. Приложение) вычислены значения моментов: $m_x = 50,787$; $m_y = 242,279$; $m_c = 156,223$; $m_{xx} = 1019,683$; $m_{yy} = 23967,283$; $m_{cc} = 9285,514$; $m_{cx} = 3001,438$; $m_{yx} = 4868,399$; $m_{cy} = 14774,202$.

Формулы (4), (5), (8) — (11) дают значения оценок: $\bar{A}_1 = 2,943$; $\bar{A}_2 = 4,774$; $\hat{\alpha} = 0,617$; $\hat{\beta} = 6,851$; $\hat{\mu} = -0,21$; $\hat{\nu} = 8,35$.

Соотношения (12) — (14) дают значения обратной матрицы ρ^{ij} : $\rho^{11} = 0,001$; $\rho^{22} = 0,015$; $\rho^{12} = 0,001$.

Значение F -распределения при $p = 2$; $N = 71$ и доверительной вероятности 0,95 равно 2,99. По (16) $T^2 = 6,097$. Подставляя значения ρ^{ij} и T^2 в (15), получим уравнение доверительной области для A_1 и A_2

$$F(A_1 A_2) = 77,921 A_1^2 + 1109,49 A_2^2 + 87,022 A_1 A_2 - 872,147 A_1 - 10850,611 A_2 + 27176,797 = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) есть уравнение эллипса с центром в точке (2,943; 4,774).

Найдем экстремальные значения A_1 и A_2 : 1) полагая в (19) $A_2 = d$ и $A_1 = d$ поочередно, имеем квадратные уравнения соответственно относительно A_1 и A_2 ; 2) вводя дополнительные условия — равенство нулю дискриминанта, получаем квадратные уравнения относительно d .

Решение полученных уравнений даст нам экстремальные точки для A_1 и A_2 . В нашем случае $A_{1\max} = 3,241$; $A_{1\min} = 2,645$; $A_{2\max} = 4,851$; $A_{2\min} = 4,697$. Соответствующая доверительная область для A_1 и A_2 показана на рис. 1.

На рис. 2 с помощью (17) и (18) получена доверительная область для α и μ с центром в точке (0,617; -0,21).

Экстремальные значения α и μ будут определяться точками A_1 и A_2 , частные производные в которых равны, т. е.

$$\frac{\partial F(A_1 A_2)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A_1 A_2)}{\partial A_2}. \quad (20)$$

Подстановка (20) в (19) дает квадратные уравнения относительно A_1 и A_2 . Решение этих уравнений позволяет получить точки, подстановка которых в (18) и (19) дает экстремальные значения α и μ . В нашем случае $\alpha_{\max} = 0,676$, $\alpha_{\min} = 0,558$, $\mu_{\max} = -0,129$, $\mu_{\min} = -0,291$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Исходные данные по США (в млрд. долл. в ценах 1958 г.)

Год	Конечный продукт, $Y(t)$	Валовые капиталовложения, $X(t)$	Личное потребление, $C(t)$	Год	Конечный продукт, $Y(t)$	Валовые капиталовложения, $X(t)$	Личное потребление, $C(t)$
1896	60,6	16,3	39,0	1917	132,5	29,0	85,6
1897	65,7	17,4	42,1	1918	144,5	29,1	85,2
1898	67,1	16,6	42,8	1919	146,1	29,8	88,9
1899	73,2	16,8	47,9	1920	144,4	27,2	93,2
1900	75,3	19,4	48,3	1921	141,0	25,1	99,2
1901	83,9	21,2	54,2	1922	149,3	32,8	103,0
1902	84,9	23,8	54,8	1923	169,1	39,1	112,5
1903	88,9	23,8	58,0	1924	174,1	41,0	120,6
1904	87,8	22,7	58,7	1925	178,3	45,7	117,0
1905	94,3	24,6	62,0	1926	189,9	49,0	126,6
1906	105,2	27,9	69,0	1927	191,8	47,6	129,5
1907	106,9	29,4	70,2	1928	194,1	47,6	132,6
1908	98,1	25,2	65,8	1929	203,6	47,6	139,6
1909	110,1	28,5	73,0	1930	183,5	39,2	130,4
1910	111,1	29,4	74,4	1931	169,3	29,6	126,1
1911	114,9	26,6	78,0	1932	144,2	19,0	114,8
1912	120,3	29,8	80,0	1933	141,5	16,5	112,8
1913	125,1	32,2	82,6	1934	154,3	21,0	118,1
1914	115,5	24,8	81,6	1935	169,5	24,9	125,5
1915	119,0	23,8	80,2	1936	193,0	35,0	138,4
1916	135,7	28,5	87,4	1937	203,2	36,4	143,1
1938	192,9	32,5	140,2	1953	412,8	92,1	250,8
1939	209,4	37,4	148,2	1954	407,0	89,4	255,7
1940	227,2	41,0	155,7	1955	438,0	96,3	274,2
1941	263,7	52,1	165,4	1956	446,1	97,7	281,4
1942	297,8	59,7	161,4	1957	452,5	94,1	288,2
1943	337,1	64,5	165,8	1958	447,3	94,8	290,1
1944	361,3	66,9	171,4	1959	475,9	102	307,3
1945	355,2	57,9	183,0	1960	487,7	101,3	316,2
1946	312,5	53,5	203,5	1961	497,2	101,8	322,5
1947	309,9	62,0	206,3	1962	529,8	108,8	338,4
1948	323,7	68,5	210,8	1963	551,0	113,3	353,3
1949	324,1	67,7	216,5	1964	580,0	119,5	373,7
1950	355,3	77,6	230,5	1965	614,4	128,8	398,4
1951	383,4	83,0	232,8	1966	652,6	134,2	418,0
1952	395,1	87,2	239,4				

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Haavelmo. Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume. В сб. Econometric methods Studies. N. Y., 1953.

Поступила в редакцию
16 V 1972

О ПРИМЕНЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В. А. КОЛЕМАЕВ, П. Д. ПАЩЕНКО

(Москва)

Для современного производства характерно совместное функционирование машины, автоматически выполняющей основные рабочие операции, и человека, который управляет машиной, настраивает ее. Ниже исследуется человеко-машинная система, состоящая из m одинаковых приборов (станков, аппаратов) и человека-оператора, который выполняет начальную и заключительную операции (скажем, производит установку заготовки и снимает готовую деталь со станка). Каждое требование, поступающее в такую систему, последовательно проходит три фазы обслуживания: начальную (подготовительную), основную и заключительную, причем время обслуживания на каждой фазе является случайной величиной (что определяется как входящим потоком требований, так и самой системой) с заданным законом распределения.

Ставится задача оптимального синтеза этой системы, т. е. установления оптимального количества аппаратов и оптимальной организации входящего потока требований. Последнее означает возможность целесообразного изменения последовательности поступления требований в систему. Далее предполагается, что на входе всегда имеется определенное количество требований, тем самым запуск очередного требования в систему определяется только ее готовностью к приему. Процессы первоначального заполнения и заключительного освобождения не исследуются, так как предполагается, что соответствующие промежутки времени составляют незначительную часть общего времени функционирования системы. В качестве критерия оптимальности могут быть выбраны различные варианты по максимизации (при некоторых ограничениях) производительности либо по минимизации общих потерь (издержек производства) при заданной производительности.

1. ПРОЦЕСС МАШИННОГО ДОЕНИЯ КАК ТРЕХФАЗНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Система представляет собой доильную установку, состоящую из m параллельных станков и m аппаратов, обслуживаемых одним человеком. На первой фазе поступившее на обслуживание животное готовится к процессу машинного доения (основная, вторая фаза) и подготавливается доильный аппарат. Заключительная, третья фаза включает в себя операции по машинному или ручному дою, массажу и отключению аппарата, после выполнения которых очередное требование покидает систему.

Полагаем, что оператор имеет возможность практически безошибочно определить момент окончания обслуживания требования в любой фазе. Случайный характер длительности обслуживания в каждой фазе определяется как индивидуальными свойствами животных (большая или меньшая склонность отдельных особей к машинному доению, большая или меньшая степень тугодойности и т. п.), так и самой системой. Ниже будут рассмотрены случаи, когда времена обслуживания следуют показательному либо нормальному законам распределения.

Примем неизменной следующую совокупность правил функционирования системы:

- 1) обслуживание требования в любой фазе не может быть прервано и производится до полного завершения, при этом во второй фазе возможны даже «перехватки» («сухое доение»), т. е. такие ситуации, когда требование находится во второй фазе сверх необходимого времени — до тех пор, пока оператор не переведет его на обслуживание в третью фазу;