ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1973
том IX, вып. 1

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ю. В. СИНЯК

(Москва)

Плановые расчеты по своей природе имеют стохастический характер, так как исходные параметры задачи подвергаются постоянному воздействию случайных факторов, которые не учитываются и часто не могут быть приняты во внимание в экономико-математических моделях. В результате этого выходная величина модели принимает не единственное значение; она лежит в некоторой «зоне неопределенности», ширина которой характеризуется погрешностью исходных данных и внутренней структурой математической модели. Недоучет этого явления в плановой работе часто приводит к необходимости осуществления трудоемких поисков оптимального решения в зоне неопределенности, что не имеет смысла, или к полному отрицанию результатов оптимизации, а отсюда и целесообразности применения экономико-математических методов. Последнее создает предпосылки для появления неформальных (или так называемых административных) методов управления. Необходимость учета неопределенности исходной информации при принятии решений возрастает при увеличении периода планирования, ускорении темпов научно-технического прогресса, постоянного роста доли новых видов продукции и методов их получения в общем объеме промышленного производства, дальнейшего совершенствования механизма функционирования народного хозяйства.

В настоящее время для решения многих плановых задач используется метод линейного программирования, который по своей сути является глубоко детерминированным.Для того чтобы расширить области применения линейного программирования, повысить эффективность и представительность получаемых результатов, нужно решить проблему учета неопределенности исходной информации в подобного рода задачах. Можно наметить два принципиально разных подхода к оценке погрешности (неопределенности) в задачах линейного программирования, дающих различные результаты. Первый описан в [1]; он заключается в исследовании поведения функционала задачи линейного программирования моделированием по методу Монте-Карло. В результате удается получить зону неопределенности, внутри которой с заданной вероятностью находится значение функционала при некоторых значениях погрешности исходных данных. По сути дела при таком подходе исследуется устойчивость фукционала модели к вариациям исходных параметров.

Второй подход основан на классической теории погрешности, в соответствии с которым рассматривается не сама модель, а только оптимальный план, полученный при решении задачи по этой модели. Настоящая статья посвящена описанию второго метода оценки погрешности оптимального решения в задачах линейного программирования. Поскольку приводимый ниже вывод оценки погрешности оптимального решения задачи линейного программирования базируется на фундаментальных положениях теории погрешностей, то целесообразно прежде всего становиться на некоторых основных принципах этой теории.

В [2] предельной абсолютной погрешностью ε_a приближенного числа a называется наименьшее положительное число, которое больше или равно по модулю точной ошибке, т. е. $\varepsilon_a \geqslant |\Delta_a|$. Если таких чисел можно найти несколько, то по определению должно быть выбрано наименьшее. Предельной относительной погрешностью δ_a приближенного числа a является отношение $\delta = \frac{\varepsilon_a}{|a|}$. За предельную абсолютную погрешность суммы нескольких слагаемых можно принять сумму предельных абсолютных погрешностей слагаемых

$$u = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \tag{1}$$

$$\varepsilon_u = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k.$$

Предельная абсолютная погрешность произведения двух сомножителей определяется так

$$\begin{aligned} u &= ab, \\ \varepsilon_u &= a\varepsilon_b + b\varepsilon_a. \end{aligned} \tag{2}$$

Предельная абсолютная погрешность функции многих переменных $u = f(x, y, \ldots, w)$

$$\varepsilon_u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\ y=b\\ \cdots\\ w=m}} \varepsilon_a + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\ y=b\\ \cdots\\ w=m}} \varepsilon_b + \ldots + \left|\frac{\partial u}{\partial w}\right|_{\substack{x=a\\ y=b\\ \cdots\\ w=m}} \varepsilon_m. \tag{3}$$

Ниже широко использован так называемый «метод равных влияний». Смысл его заключается в том, что предельные погрешности аргументов следует подбирать так, чтобы все члены в правой части (3) имели одинаковые значения, т. е.

$$\left|\frac{\partial u}{\partial u}\right| \varepsilon_a = \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \varepsilon_b = \ldots = \frac{\varepsilon_n}{n}, \tag{4}$$

где n — число аргументов. Эти равенства дают выражение для предельных погрешностей аргументов

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_u}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|}, \quad \varepsilon_b = \frac{\varepsilon_u}{n\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|} \quad \ldots. \tag{5}$$

Как отмечается в [2], вряд ли может быть получено обоснование этого метода; он является только удобным соглашением, позволяющим практически подойти к оценке погрешности функции многих переменных. Присутствие погрешностей в исходной информации задачи линейного программирования приводит к тому, что гиперплоскости ограничений начинают осциллировать вокруг своего центра рассеивания. Такой процесс осцилляции заставляет оптимальную вершину многогранника условий описывать некоторую область в пространстве. Проекции крайних точек этой области на оси координат дают возможность определить пределы изменения значения переменных, т. е. их предельные погрешности, а координаты крайних точек по целевой функции — пределы изменения функционала в оптимальной вершине, т. е. также его предельную погрешность. При построении оценки погрешности задачи линейного программирования введем следующие допущения:

1) ЭВМ не дает погрешности при вычислениях, поэтому все дополнительные переменные в задаче линейного программирования принимают погрешность, равную нулю;

2) распределение величин в зоне погрешности подчиняется нормальному закону;

3) если погрешности некоторой величины, рассчитанные по различным выражениям, отличаются друг от друга, то по определению предельная погрешность этой величины принимается равной наименьшей. Пусть погрешности величины x_i, определенные по различным ограничивающим условиям, образуют ряд $\varepsilon^1_{x_i}, \varepsilon^2_{x_i}, \ldots, \varepsilon^j_{x_i}$, причем может быть проведено упорядочение этого ряда в виде $\varepsilon_{x_i}^1 \leqslant \varepsilon_{x_i}^2 \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_{x_i}^j$. Тогда предельная погрешность величины x_i в данной системе (модели) равна $\inf\{\varepsilon^j_{x_i}\}$, т. е. наименьшей из определенных погрешностей $(\varepsilon^1_{x_i})$;

4) при оценке погрешности аргументов в функциях многих переменных, каковыми являются ограничивающие условия задачи линейного программирования, может быть применен метод равных влияний (5).

Рассмотрим задачу линейного программирования в общем виде: минимизировать

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{6}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b_j, \quad j = 1, 2, \ldots m, \tag{7}$$

$$x_i \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

Требуется оценить погрешность оптимального решения задачи (6)—(8), т. е. погрешности значений всех x_i^* и целевой функции F^* в точке оптимума.

Первый этап. Оценка погрешности переменных x_i^*, вошедших в оптимальное решение.

Исходя из (3) для дифференциальной формулы оценки ошибок функции многих переменных, для каждого ограничивающего условия (7) в оптимальном решении можно записать

$$\varepsilon_{b_j} = x_1{}^*\varepsilon_{a_1} + |a_1|\,\varepsilon_{x_1{}^*} + x_2{}^*\varepsilon_{a_2} + |a_2|\,\varepsilon_{x_2{}^*} + \ldots$$

$$\ldots + x_k{}^*\varepsilon_{a_k} + |a_k|\,\varepsilon_{x_k{}^*} = \sum_{i=1}^{k} x_i{}^*\varepsilon_{a_i} + \sum_{i=1}^{k} |a_i|\,\varepsilon_{x_i{}^*}. \tag{9}$$

Согласно методу равных влияний (5) и определению предельной абсолютной погрешности, предельная абсолютная погрешность каждого x_i^*, вошедшего в оптимальное решение

$$\varepsilon_{x_i{}^*} = \inf \left| \frac{\varepsilon_{b_j} - \sum\limits_{l=1}^{k} x_l{}^*\varepsilon_{a_l}}{k\,|a_i|} \right|. \tag{10}$$

Из (10) предельная относительная погрешность

$$\delta_{x_i^*} = \left\{\frac{\varepsilon_{x_i^*}}{x_i^*}\right\} = \inf \left| \frac{\delta_{b_j} b_j - \sum\limits_{l=1}^{k} x_l^* |a_l| \delta_{a_l}}{k |a_i| x_i^*} \right| =$$

$$= \inf \left| \frac{\delta_{b_j} b_j}{k |a_i| x_i^*} - \frac{x_i^* |a_i| \delta_{a_i}}{k |a_i| x_i^*} - \frac{\sum\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{k} x_l^* |a_l| \delta_{a_l}}{k |a_i| x_i^*} \right| =$$

$$= \inf \frac{1}{k} \left| \frac{\delta_{b_j}}{\alpha_i} - \delta_{a_i} - \frac{\sum\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{k} x_l^* |a_l| \delta_{a_l}}{|a_i| x_i^*} \right|, \tag{11}$$

где $\alpha_i = \dfrac{|a_i| x_i^*}{b_j}$ — доля интенсивности x_i в ограничении b_j.

Второй этап. Оценка погрешности функционала F^*.

Согласно (3), предельная абсолютная погрешность для выражения целевой функции (6)

$$\varepsilon_{F^*} = |c_1| \varepsilon_{x_1^*} + x_1^* \varepsilon_{c_1} + |c_2| \varepsilon_{x_2^*} + x_2^* \varepsilon_{c_2} + \ldots$$

$$\ldots + |c_k| \varepsilon_{x_k^*} + x_k^* \varepsilon_{c_k} = \sum_{i=1}^{k} |c_i| \varepsilon_{x_i^*} + \sum_{i=1}^{k} x_i^* \varepsilon_{c_i}. \tag{12}$$

Подставляя в (12) выражения для соответствующих $\varepsilon_{x_i^*}$, полученных по (10), имеем

$$\varepsilon_{F^*} = \sum_{i=1}^{k} |c_i| \inf \left| \frac{\varepsilon_{b_j} - \sum\limits_{l=1}^{k} x_l^* \varepsilon_{a_l}}{k |a_i|} \right| + \sum_{i=1}^{k} x_i^* \varepsilon_{c_i}. \tag{13}$$

Переходя от предельной абсолютной погрешности ε_{F^*} к предельной относительной погрешности δ_{F^*} с учетом относительной погрешности x_i^* (11), получаем

$$\delta_{F^*} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} |c_i| x_i \inf \frac{1}{k} \left| \frac{\delta_{b_j}}{\alpha_i} - \delta_{a_i} - \frac{\sum\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{k} x_{a_l}^* |a_l| \delta_{a_l}}{|a_i| x_i^*} \right| + \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^* |c_i| \delta_{c_i}}{F^*}. \tag{14}$$

Проиллюстрируем процедуру вычисления оценки погрешности оптимального решения на простейшем примере следующего вида: максимизировать $F = 0{,}69\ x_1 + 3{,}84\ x_2$ при ограничениях $0{,}87\ x_1 + 1{,}72\ x_2 \leqslant 20$, $0{,}92\ x_1 + 0{,}65\ x_2 \leqslant 15$, $x_2 \leqslant 8{,}5$; $x_1, x_2 \geqslant 0$. Предположим, что предельные относительные погрешности всех элементов вектора ограничений $\delta_{b_j} = 10\%$; предельные относительные погрешности всех коэффициентов матрицы условий $\delta_{a_i} = 5\%$, предельные относительные погрешности всех коэффициентов функционала $\delta_{c_i} = 15\%$. Задача заключается в нахождении погрешностей всех x_i^* и величины функционала F^* в точке оптимума. Решая эту задачу, находим: $x_1^* = 6{,}3$, $x_2^* = 8{,}5$ и $F^* = 36{,}99$.

В соответствии с задачей первого этапа расчетов определим предельные абсолютные погрешности переменных x_i^* по (10). Для x_1^* имеем

$$\varepsilon_{x_1}{}^1 = \frac{2-(6{,}3\cdot 0{,}044+8{,}5\cdot 0{,}086)}{2\cdot 0{,}87} = 0{,}57,$$

$$\varepsilon_{x_1}{}^2 = \frac{1{,}5-(6{,}3\cdot 0{,}046+8{,}5\cdot 0{,}033)}{2\cdot 0{,}92} = 0{,}51.$$

Принимаем в качестве абсолютной погрешности величины x_1 меньшую из вычисленных значений, т. е. $\varepsilon_{x_1^*} = 0{,}51\,(\delta_{x^*_1} = 8{,}1\%)$. Для

$$\varepsilon_{x_2}{}^1 = \frac{2-(6{,}3\cdot 0{,}044+8{,}5\cdot 0{,}086)}{2\cdot 1{,}72} = 0{,}29,$$

$$\varepsilon_{x_2}{}^2 = \frac{1{,}5-(6{,}3\cdot 0{,}046+8{,}5\cdot 0{,}033)}{2\cdot 0{,}65} = 0{,}72,$$

$$\varepsilon_{x_2}{}^3 = \frac{0{,}85-8{,}5\cdot 0{,}05}{2\cdot 1} = 0{,}21.$$

В качестве предельной абсолютной погрешности величины x_2 берем $\varepsilon_{x_2^*} = 0{,}21\,(\delta_{x_2^*} = 2{,}5\%)$.

На втором этапе проводится вычисление погрешности функционала по (13): $\varepsilon_{F^*} = 0{,}69\cdot 0{,}51 + 6{,}3\cdot 0{,}1 + 3{,}84\cdot 0{,}21 + 8{,}5\cdot 0{,}58 = 6{,}72\,(\delta_{F^*} = 18{,}2\%)$.

Попробуем приближенно оценить предельные значения погрешностей переменных x_i^*, вошедших в оптимальное решение, и целевой функции F^* в точке оптимума. Для этого воспользуемся двумя крайними случаями: 1) все потребители покрываются одним ресурсом; 2) каждый потребитель покрывается своим ресурсом j. Очевидно, оба случая являются предельно возможными для (6) — (8). Реальные оптимальные решения лежат внутри принятого диапазона.

Для простоты предположим, что все $\delta_b = \delta_{c_i} = \delta$ и $\delta_{a_i} = 0$ *.

Случай 1. $k = n$, $a_i < 1$. Тогда из (11) имеем

$$\delta_{x_i^*} = \inf\left\{\frac{\delta}{n a_i}\right\}. \tag{15}$$

Подставляя найденные по (15) значения относительной погрешности x_i^* в (14), получаем

$$\delta_{F^*} = \delta\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} |c_i| x_i^* \inf \frac{1}{n a_i}}{F^*} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{\cdot} |c_i| x_i^*}{F^*}\right). \tag{16}$$

Первое слагаемое в скобках равенства (16) больше нуля, а второе больше или равно единице, так как $F^* = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i x_i^* \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} |c_i|\, x_i^*$; следовательно, в общем случае нижняя граница предельной относительной погрешности

* Это предположение вполне реально, если учесть, что коэффициенты матрицы условий (6) — (8) в практических условиях всегда имеют большую точность, чем элементы вектора ограничений и целевой функции. Аналогичные допущения сделаны, например, в [1].

функционала в задаче линейного программирования больше погрешности исходной информации: $\delta_{F^*} > \delta$.

Случай 2. $k = 1$, $\alpha_i = 1$. Тогда из (11) имеем

$$\delta_{x_i^*} = \delta. \tag{17}$$

Оценка предельной относительной погрешности функционала

$$\delta_{F^*} = \delta \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} |c_i| x_i^*}{F^*} + \frac{\sum_{i=1}^{k} |c_i| x_i^*}{F^*} \right). \tag{18}$$

Поскольку оба слагаемых в скобках равенства (18) больше или равны единице, то $\delta_{F_k^*} \geqslant 2\delta$. Если все коэффициенты функционала положительны, то $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i^* = \sum_{i=1}^{k} |c_i| x_i^*$ и $\delta_{F^*} = 2\delta$. Таким образом, верхняя граница предельной относительной погрешности функционала оказывается не меньше удвоенной погрешности исходной информации. Зная предельные абсолютные и относительные погрешности какой-либо величины, можно перейти к оценке статистической погрешности этой величины с заданной вероятностью попадания исследуемой величины в зону ее колеблемости. Примем с некоторой условностью (в пятом знаке после запятой), что предельная абсолютная погрешность $\varepsilon_{x_i} = 4{,}0\ \sigma_{x_i}$, где σ_{x_i} — среднеквадратическое отклонение величины x_i. Тогда с вероятностью $P = 0{,}68$ статистическая погрешность x_i равна $\rho_{x_i} = \pm\sigma_{x_i}$; с вероятностью $P = 0{,}95 - \rho_{x_i} = \pm 2\sigma_{x_i}$; с вероятностью $P = 0{,}99 - \rho_{x_i} = \pm 3\sigma_{x_i}$. Так, в нашем примере для величины $x_1^* = 6{,}3$ ($\varepsilon_{x_1^*} = 0{,}51$) статистические погрешности составляют: с вероятностью $P = 0{,}68 - \rho_{x_1} = \pm 0{,}13$; с вероятностью $P = 0{,}95 - \rho_{x_1} = \pm 0{,}26$; с вероятностью $P = 0{,}99 - \rho_{x_1} = \pm 0{,}39$.

На основании изложенного можно сделать некоторые выводы относительно принципов построения рациональных математических моделей с точки зрения устойчивости их структуры и представительности результатов.

Из (10) и (11) для оценок предельной абсолютной и относительной погрешностей переменных x_i вытекают следующие положения: 1) погрешность x_i уменьшается при уточнении значений вектора ограничений b_j; 2) чем больше доля потребителя i в использовании ресурса $j\,(\alpha_i)$, тем меньше погрешность x_i; 3) чем большее количество потребителей участвуют в использовании ресурса $j\,(k)$, тем более точное значение имеют x_i. Отсюда можно сделать вывод, что, по-видимому, в дезагрегированных моделях погрешности переменных x_i меньше, чем в агрегированных.

Из (13) и (14) для оценки предельной абсолютной и относительной погрешности величины функционала F^* в оптимальном решении вытекает, что поскольку погрешность ε_{F^*} зависит как от собственно значений x_i и c_i, так и от их абсолютных погрешностей ε_{x_i} и ε_{c_i}, то следует стремиться: 1) к определению больших величин c_i наиболее точно; 2) к снижению величин x_i за счет дезагрегирования модели. Таким образом, можно считать, что погрешность функционала в дезагрегированной модели ниже, чем в укрупненной при одинаковых погрешностях исходных данных. Полученные выводы в отношении переменных и функционала согласуются с практическими результатами [1].

В отношении целесообразности дезагрегирования модели предлагается следующая схема рассуждений: 1) если исходная абсолютная погрешность для некоторых коэффициентов матрицы условий ε_{a_i}, элементов вектора ограничений ε_{b_j} или коэффициентов целевой функций ε_{c_i} превосходит диапазон устойчивости этих параметров в смысле Шетти [3], то для соблюдения условия корректности результатов оптимизации эти параметры подлежат дезагрегированию до тех пор, пока исходная погрешность не будет лежать внутри диапазона устойчивости; 2) если найденная абсолютная погрешность для некоторых переменных x_i превосходит заданный уровень их колеблемости, то эти потребители (способы) также подлежат дезагрегированию, пока погрешность не окажется внутри диапазона колеблемости; 3) если по условиям задачи погрешность функционала ε_{F^*} превосходит заданный уровень, то для удовлетворения заданных условий по колеблемости необходимо в первую очередь стремиться к дезагрегированию наиболее крупных потребителей (способов).

Рассмотренный подход к оценке погрешности оптимального решения задачи линейного программирования может оказаться полезным при построении рациональных математических моделей, адекватным образом описывающих исследуемый процесс, и разработке механизмов функционирования отдельных подсистем народного хозяйства.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Макаров. Математическое моделирование топливно-энергетического хозяйства. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 6.
2. Б. М. Щиголев. Математическая обработка наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
3. C. M. Shetty. On Analysis of the Solution to a Linear Programming Problem. Operat. Res. Quart. 1961, vol. 12, No. 2.

Поступила в редакцию
21 XII 1970