

МНОГОСТУПЕНЧАТАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С КОНКРЕТНЫМИ ФОРМАМИ ЛОКАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ

В. Ф. ПУГАЧЕВ, Г. В. МАРТЫНОВ, В. Г. МЕДНИЦКИЙ,
А. К. ПИТЕЛИН

(Москва)

В [1] рассмотрена схема многоступенчатой оптимизации с локальным критерием общего вида. Применяя конкретные формы W , можно получать соответствующие модификации общей схемы, ставить вычислительные эксперименты, проводить сравнительный анализ, делать выводы математического и экономического характера. Этому кругу вопросов и посвящена предлагаемая статья.

1. АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ДОСТИЖЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ОПТИМУМА

Основному содержанию данной статьи предпослшем исследования, относящиеся к общей модели, так как это необходимо для последующего анализа и сравнения экспериментировавшихся вариантов.

Многоступенчатый процесс, описанный в [1], представляет собой единый итеративный алгоритм оптимизации. На каждой глобальной итерации он характеризуется определенным набором величин, которые последовательно уточняются в результате повторения ряда стандартных операций. Естественно возникает вопрос, что же произойдет, если счет будет производиться достаточно долго: сойдется ли процесс, и если сойдется, то будет ли это абсолютным оптимумом для всей глобальной задачи. Как указывалось в [1], ответить на этот вопрос путем чисто теоретического анализа в настоящее время не представляется возможным. Поэтому данный раздел преследует более узкую цель: рассмотреть проблему сходимости применительно к практике вычислительных экспериментов и дать методу проверки на оптимум получаемого решения.

Для изложения проблемы сходимости под таким углом зрения полезно использовать следующую физическую аналогию. Конкретные значения величин, определяющих начало итерации, будем рассматривать как характеристику *состояния динамической системы*. Каждая новая глобальная итерация меняет эти величины, что можно интерпретировать как переход системы из одного состояния в другое. Реализация алгоритма многоступенчатой оптимизации позволяет, таким образом, наблюдать траекторию движения. Указанная аналогия полезна в том отношении, что о поведении динамических систем известно довольно много. Наблюдая за ходом реализации многоступенчатого алгоритма, можно судить о характере поведения системы. Уход траектории в бесконечность можно исключить сразу, так как все переменные изменяются в ограниченных пределах. В случае предельного цикла будут наблюдаться более или менее регулярные изменения параметров состояния на больших участках траектории и со значительной ампли-

тудой. Если же происходит стабилизация параметров состояния, то система, видимо, приближается к положению равновесия (или, в крайнем случае, к предельному циклу с весьма малой амплитудой, практически не отличимому от равновесия). Понятно, что в вычислительных экспериментах удастся наблюдать лишь ограниченные участки конечного числа траекторий и поэтому все суждения о ходе процесса не могут быть абсолютно достоверными. В этом смысле правомерность описываемого подхода может подтверждаться лишь практикой.

Из перечисленных выше типов предельного поведения динамической системы только один — достижение равновесия — может представлять интерес как возможный оптимум. Если равновесие не достигается, вычислительные эксперименты должны быть прекращены и схема оптимизации пересмотрена. Напротив, при наличии равновесия эксперименты необходимо продолжать до тех пор, пока не останется никаких сомнений относительно характера поведения системы. Поэтому введем сразу же предпосылку о том, что система *стремится к некоторому состоянию равновесия*, все параметры которого могут быть найдены с любой степенью точности. Эта предпосылка фактически эквивалентна предположению о сходимости алгоритма многоступенчатой оптимизации. Однако проблема отнюдь не снимается, ибо, как хорошо известно, не всякое равновесие есть оптимум. Таким образом, основная цель данного раздела заключается в выявлении тех дополнительных условий, при которых равновесие есть одновременно абсолютный оптимум.

Рассмотрим понятие равновесия применительно к изучаемой многоступенчатой модели. В итеративном процессе межотраслевой оптимизации, который описан в [1], на каждой глобальной итерации t вычисляются следующие величины: локально-оптимальные планы отраслей $\bar{x}^{kt}$ в дробной номенклатуре ресурсов ($\bar{x}^{kt} = \{\bar{x}_i^{kt}\}$, $i \in \bigcup_k I_p^k \cup I_R$); цены $\{\bar{p}_i^{kt}\}$ по всей дробной номенклатуре ресурсов, являющиеся частными производными отраслевых локальных критериев W_k^t ; агрегированный межотраслевой план $\{\bar{X}^t, \bar{Y}^t\}$ и цены агрегированных продуктов и лимитированных ресурсов $\bar{P}^t$; скорректированные цены $\bar{p}^{kt}$ по дробной номенклатуре ресурсов; составляющие конечного продукта в дробной номенклатуре $\{y_i^t\}$; скорректированные по вертикали планы отраслей в дробной номенклатуре $\bar{x}^{kt}$; те же планы, скорректированные по вертикали и горизонтали $\bar{\bar{x}}^{kt}$; значения параметров отраслевых локальных критериев, скорректированные исходя из соотношения

$$\left. \frac{\partial W_k^{t+1}}{\partial x_i^{kt}} \right|_{x^{kt} = \bar{\bar{x}}^{kt}} = \bar{p}_i^{kt}, \quad (1)$$

после чего начинается новая, $t + 1$ -я глобальная итерация.

Равновесие многоступенчатой модели следовало бы определить как состояние, при котором все перечисленные величины не меняются от итерации к итерации. Однако поскольку они взаимосвязаны, такое определение равновесия было бы избыточно, ибо можно указать значительно более узкий перечень характеристик равновесия. Принципиальную роль в процессе многоступенчатой оптимизации и, следовательно, в процессе изменения всех перечисленных выше величин играет (1). Если локальные критерии W_k^t , построенные на t -й итерации, автоматически удовлетворяют этому соотношению и на $t + 1$ -й итерации, то никакой корректировки параметров локальных критериев не произойдет. Следовательно, и все другие величины, начиная с $\bar{x}_k^{kt}$ и $\bar{p}^{kt}$, воспроизведут на $t + 1$ -й итерации лишь те значения, которые у них были на t -й итерации. А это будет означать

равновесие. В свою очередь (1) определяется величинами $\bar{x}^{ht}$ и $\bar{p}^{ht}$. Стабилизация этих величин автоматически влечет выполнение (1) и, следовательно, приводит к равновесию в системе. Таким образом, величины $\bar{x}^{ht}$ и $\bar{p}^{ht}$ могут служить исчерпывающими характеристиками равновесия. В связи с этим введем определение.

Определение 1. *Равновесием будем называть состояние, при котором величины $\{\bar{x}_i^{ht}\}$ и $\{\bar{p}_i^{ht}\}$, $i \in \bigcup_k I_p^h \cup I_R$, достигают своих предельных значений*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_i^{ht} = \bar{x}_i^h, \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}_i^{ht} = \bar{p}_i^h.$$

Если эти пределы не существуют, то последовательности $\{\bar{x}_i^{ht}\}$ и $\{\bar{p}_i^{ht}\}$ имеют несколько предельных точек, что означает предельный цикл. Таким образом, существование пределов в (2) — необходимая предпосылка равновесия.

Достижение равновесия в смысле определения 1 гарантирует стабилизацию всех параметров состояния системы, но ничего не говорит о соотношениях между предельными значениями параметров. Однако в процессе многоступенчатой оптимизации эти соотношения не безразличны; в частности, потоки информации, идущие снизу вверх, должны быть увязаны с «директивами», идущими сверху вниз. Это прежде всего касается отраслевых планов $\dot{x}^{ht}$ и $\bar{x}^{ht}$. Стабилизация этих планов еще не означает, что их предельные значения будут совпадать. Может наблюдаться ситуация, когда между предложениями отраслей $\dot{x}^{ht}$ и «директивами» $\bar{x}^{ht}$ имеется постоянное, неустранимое несоответствие (и это действительно наблюдалось в некоторых экспериментах). Такая ситуация возможна в том случае, когда механизм локального критерия не может полностью подстроиться под требования глобальной оптимизации.

Определение 2. *Согласованным равновесием будем называть состояние, при котором наряду с требованиями определения 1 выполняется условие*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_i^{ht} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_i^{ht}, \quad i \in \bigcup_k I_p^h \cup I_R. \quad (3)$$

Относительно согласованного равновесия можно доказать следующее утверждение: *состояние согласованного равновесия, если оно достигается, соответствует абсолютному оптимуму описанной в [1] глобальной модели.*

Доказательство будет состоять в последовательной проверке всех условий оптимальности этой модели в точке согласованного равновесия. Обозначим компоненты глобального оптимального плана через $\dot{x}_i^h$, $\dot{y}_i$, $\dot{\xi}_{ij}^{ht}$, а оценки этого плана через

$$\dot{p}_i, \quad i \in \bigcup_k I_p^h \cup I_R, \quad \dot{p}_i^h, \quad i \in I_r^h \cup I_0^h$$

и $\dot{q}_i^h, \quad l \in L_h$. Тогда условия оптимальности можно записать в виде

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y_i} \right|_{y=y^*} \leq \lambda \dot{p}_i, \quad \dot{y}_i \geq 0, \quad i \in \bigcup_k I_p^h, \quad (4)$$

$$\dot{x}_i^k + \sum_{s \neq k} \dot{x}_i^s - \dot{y}_i = 0, \quad i \in \bigcup_k I_p^k, \quad (5)$$

$$- \sum_k \dot{x}_i^k \leq R_i, \quad \dot{p}_i \geq 0, \quad i \in I_R, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} -\dot{x}_i^k &\leq r_i^k, \quad \dot{p}_i^k \geq 0, & i \in I_r^k \\ \dot{x}_i^k &\geq 0, \quad \dot{p}_i^k \geq 0, & i \in I_0^k \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$\dot{x}_i^k = \sum_{l \in L_k} \sum_j a_{ij}^{kl} \dot{\xi}_j^{kl}, \quad (8)$$

$$\sum_j \dot{\xi}_j^{kl} \leq 1, \quad \dot{q}_l^k \geq 0, \quad (9)$$

$$\dot{\xi}_j^{kl} \geq 0, \quad \sum_{i \in \bigcup_k I_p^k \cup I_R} \dot{p}_i a_{ij}^{kl} + \sum_{i \in I_r^k \cup I_0^k} \dot{p}_i^k a_{ij}^{kl} - \dot{q}_l^k \leq 0. \quad (10)$$

Для удобства (4), (6), (7), (9), (10) выписаны парами сопряженных неравенств, но условия сопряженности опущены. Например, неравенства (4) следовало бы дополнить равенством

$$\sum_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \bigg|_{y=y^*} \dot{y}_i = \lambda \sum_i \dot{p}_i^* y_i$$

и т. д.

Анализируя задачу [1, (45), (46)], решением которой являются величины $\dot{y}^t$, нетрудно убедиться, что условия (4) автоматически выполняются на каждой глобальной итерации для этих величин и оценок $\bar{p}^{ht}$. Отсюда очевидно выполнение этих условий и для интересующих нас предельных векторов

$$\dot{y} = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}^t \quad \text{и} \quad \dot{p} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}^{ht}.$$

Балансовые соотношения (5) также выполняются на каждой глобальной итерации для величин $\dot{y}^t$ и $\bar{x}^{ht}$ в силу определения последних (см. [1, (49)]). Принимая $\dot{x}^k = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}^{ht}$, мы сохраняем справедливость соотношений (5) и для величин $\dot{y}^*$, $\dot{x}^k$.

Попутно заметим, что в силу условия согласованного равновесия (3) глобально-оптимальные отраслевые планы $\{\dot{x}^k\}$ могут быть определены непосредственно через локально-оптимальные планы отраслей, т. е. $\dot{x}^k = \lim \dot{x}^{ht}$.

Выполнение условий (6) очевидно для планов $\bar{x}^{ht}$, которые совпадают по номенклатуре лимитированных народнохозяйственных ресурсов ($i \in I_R$) с планами $\dot{X}^{ht}$, вычисляемыми на каждой глобальной итерации в результате решения агрегированной межотраслевой задачи [1, (36) — (39)]. Из определения согласованного равновесия вытекает, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}^{ht} =$

$= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}^{ht} = \dot{x}^h$. Отсюда ясно, что условия (6) будут выполнены и для

нужных нам предельных векторов $\dot{x}^h$.

Условия (7)–(9) являются чисто отраслевыми и выполняются на каждой глобальной итерации при нахождении локально-оптимальных отраслевых планов $\dot{x}^{ht}$. Они, безусловно, выполняются и для глобально-оптимальных отраслевых планов $\dot{x}^h$, являющихся пределами $\dot{x}^{ht}$.

Наконец, рассмотрим неравенства (10). В рамках каждой отраслевой задачи они выполняются на любой глобальной итерации для локально-оптимальных планов ξ^{klt} и оценок $\bar{p}^{klt} = \left. \frac{\partial W_k^l}{\partial x^k} \right|_{x^k = \dot{x}^{klt}}$. Следовательно, они будут выполнены и для предельных величин $\xi^{kl} = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi^{klt}$, $p_*^k = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}^{klt}$.

Остается лишь показать, что предельные векторы p_*^k совпадают с ранее определенными (и использованными при проверке других соотношений) векторами $\dot{p}^k$. Это доказательство может быть выполнено на основе соотношений [1, (16)] и (1). Действительно,

$$\begin{aligned} p_*^k &= \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}^{klt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}^{k(t+1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial W_k^{(t+1)}}{\partial x^k} \right|_{x^k = \dot{x}^{k(t+1)}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial W_k^{(t+1)}}{\partial x^k} \right|_{x^k = \dot{x}^{klt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}^{klt} = \dot{p}^k, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Итак, сформулированное выше утверждение о том, что точка согласованного равновесия является глобальным оптимумом, доказано.

2. ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ПРОСТЕЙШИМИ ФОРМАМИ ЛОКАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ

Под *формой локального критерия* в данной статье понимается вид функциональной зависимости между W и натуральными показателями деятельности хозяйственного объекта

$$W_k = W(x^k, \omega^k), \quad (11)$$

где x^k — вектор продукции и затрат объекта, ω^k — вектор изменяемых параметров локального критерия. Функция (11) при этом может задаваться либо непосредственно, либо в соответствии с [1, (3)] путем интегрирования ранее выбранной зависимости цен от объемов производства и затрат.

В [1] не фиксировалась конкретная форма локального критерия W , что позволило рассмотреть фактически целый класс алгоритмов многоступенчатой оптимизации и оставить достаточный простор для экспериментов. Задавая теперь ту или иную форму W , можно получить одну из модификаций описанной выше общей схемы многоступенчатой оптимизации. В результате экспериментальных исследований каждой конкретной схемы можно сделать вывод о соответствующей форме W .

Эксперименты с различными формами локального критерия были проведены на условной малоразмерной модели, содержащей 3 «отрасли», по 3–5 «предприятий» в каждой, с общей номенклатурой продукции и ресурсов порядка 20 позиций. Эксперименты были начаты с наиболее простых локальных критериев.

В первую очередь был рассмотрен *линейный критерий* (прибыль). Он получается из [1, (3)] в предположении независимости цен от объемов

производства и затрат

$$W_k = p^k x^k = \sum_{i \in \bigcup_k p^k \cup I_R} p_i^k x_i^k. \quad (12)$$

Роль изменяемых параметров ω^k здесь играют цены p_i^k . Этот критерий использован в ряде хорошо изученных алгоритмов, таких, как алгоритм Данцига — Вульфа, и не дает высокой практической сходимости. На неудовлетворительность критерия прибыли указывается также в [2]. Тем не менее, контрольные эксперименты с локальным критерием (12) были выполнены.

В ранее изложенной общей схеме локальный критерий используется на каждой глобальной итерации при решении отраслевых задач. Соответствующее приближение локального критерия готовит предыдущая глобальная итерация (формула (1)). В конечном счете, именно коррекция параметров W на основе (1) и определяет специфику схемы оптимизации с той или иной конкретной формой локального критерия. Чем лучше выполняется коррекция параметров, тем более эффективно воздействует на отраслевые планы (а следовательно, и на план для модели в целом) предыдущая глобальная итерация.

Критерий прибыли (12) характеризуется тем, что его частные производные не зависят от объемных показателей плана. Следовательно, (1) не предписывает каких-либо изменений W_k в зависимости от $\bar{x}^{ht}$, сохраняя лишь зависимость W_k от цен $\bar{p}^{ht}$. Это означает, что использование локального критерия прибыли исключает прямую коррекцию отраслевых планов по натуральным показателям и оставляет лишь косвенное, ценностное регулирование. Последствия этого очевидны: сбалансированность отраслевых планов достигается лишь после проведения очень большого числа глобальных итераций. Причем сбалансированный план не удовлетворяет, как правило, условию согласованного равновесия (3) и потому не является оптимальным. Дело в том, что при максимизации критерия прибыли отраслевые планы $\bar{x}^{ht}$ оказываются граничными точками областей производственных возможностей. Баланс же достигается в точках $\bar{x}^{ht}$, некоторые из которых обычно являются внутренними. Поэтому взаимного сближения x^{ht} и $\bar{x}^{ht}$ не наблюдается.

Помимо прибыли существует и другой локальный критерий, сохраняющий линейную постановку задач оптимизации. Это критерий *максимума продукции в задаваемом комплексе*. Комплексный локальный критерий k -й отрасли можно записать в виде

$$W_k(x^k) = \left(\min_{i \in I_p^k} \frac{x_i^k}{N_i^k} \right) \Rightarrow \max, \quad (13)$$

где N_i^k — составляющие вектора задаваемого комплекса продукции, играющие роль параметров ω^k .

Условия (1) в данном случае теряют смысл, поскольку комплексный критерий является чисто натуральным и не может реагировать на задаваемые сверху цены $\bar{p}^{ht}$. Однако остаются в силе соображения, предшествовавшие получению соотношений (1), о том, что на $t+1$ -й итерации необходимо стремиться к отраслевым планам $\bar{x}^{ht}$. Следовательно, вектор комплекса $N^{h(t+1)}$ должен браться в соответствии с вектором $\bar{x}^{ht}$

$$N_i^{h(t+1)} = \lambda_k \bar{x}_i^{ht}, \quad (14)$$

где λ_k — произвольный скалярный положительный множитель.

Выбор комплекса для $t+1$ -й итерации в виде (14) обеспечивает жесткое регулирование натурального состава продукции отраслей. В связи с этим быстро достигается взаимная увязка отраслевых планов. А это — одна из важнейших предпосылок высокой сходимости процесса многоступенчатой оптимизации.

Эксперимент для схемы с комплектным локальным критерием подробно описан в [3]. Сбалансированный и частично оптимизированный план был получен уже на 4-й *глобальной итерации*. Важность этого результата очевидна. Четыре итерации безусловно необходимы и при существующей практике балансового народнохозяйственного планирования. Если в пределах того же количества итераций можно получить хотя бы частичную оптимизацию плана — это уже значительный успех.

К сожалению, специфические особенности схемы с комплектным критерием не позволяют получить абсолютный оптимум. В эксперименте [3] четвертая глобальная итерация одновременно оказывалась и последней, дававшей сколь-нибудь заметные улучшения плана. Проведение дальнейших итераций фактически не меняло полученного решения, хотя было ясно, что оно не исчерпывает полностью возможностей модели. Анализ этой ситуации сыграл существенную роль в дальнейших исследованиях и экспериментах. Причин невозможности получения абсолютного оптимума с помощью комплектного локального критерия оказалось несколько. Прежде всего это чисто натуральный характер корректировки отраслевых планов, *отсутствие ценностного регулирования*. Поскольку цены не воздействуют на локальные планы, а от отраслей требуется лишь максимум продукции, каждый конкретный отраслевой план может быть неэкономичным, реализующим поставленную цель, не считаясь с затратами. В итоге и общий план, будучи сбалансированным, может оказаться отнюдь не наилучшим.

Указанный недостаток схемы многоступенчатой оптимизации с комплектным локальным критерием можно трактовать как результат формальной ошибки в этой схеме. Ошибка заключается в том, что при проведении итераций, вплоть до конца процесса, не выполняется условие [1, (16)] — условие равенства цены каждого ресурса на стадии его производства и на стадии потребления. Действительно, в роли производимой продукции каждый ресурс получает оценку в соответствии с оценкой всего требуемого комплекта продукции отрасли. Когда же этот ресурс потребляется какой-то другой отраслью, то его оценка по локальному критерию отрасли-потребителя всегда равна нулю.

Второй причиной невозможности получения абсолютного оптимума с помощью комплектного локального критерия является *нарушение условия согласованного равновесия* (3). Как и в случае прибыли, при использовании комплектного критерия отраслевые планы $\hat{x}^{ht}$ всегда оказываются граничными точками областей производственных возможностей, в то время как баланс достигается в точках $\bar{x}^{ht}$, некоторые из которых являются внутренними. Поэтому желаемого сближения величин $\hat{x}^{ht}$ и $\bar{x}^{ht}$ в этой схеме также не происходит.

Общий анализ, проведенный в предыдущем разделе, показывает, сколь важны условия (3) и [1, (16)] для того, чтобы точка равновесия была одновременно точкой оптимума. Анализ этих условий дает исчерпывающее объяснение результатам экспериментов с комплектным критерием.

3. ЭКСПЕРИМЕНТЫ С КВАДРАТИЧНЫМ ЛОКАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ

Эксперименты с простейшими формами локального критерия показали, что, оставаясь в рамках линейной постановки отраслевых задач, нельзя построить схему многоступенчатой оптимизации, дающую быструю практическую сходимость к абсолютному оптимуму. Необходимо, следовательно, использовать более сложные формы локального критерия, которые позволяли бы одновременно осуществлять как натуральное, так и ценностное регулирование. Такую возможность открывает *квадратичный локальный критерий*. В своей общей форме он записывается

$$W_k(x^k) = \sum_{i \in \bigcup_k I_P^k \cup I_R} \alpha_i^k x_i^k + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in \bigcup_k I_P^k \cup I_R} \beta_{ij}^k x_i^k x_j^k \quad (15)$$

и в силу [1, (3)] соответствует гипотезе линейной зависимости цен от объемов производства и затрат всех видов ресурсов. Однако число параметров $\omega^k = \{\alpha_i^k, \beta_{ij}^k\}$ в (15) чрезмерно велико (порядка $n^2/2$, где n — размерность вектора x^k), и для их определения нужно провести слишком большое число глобальных итераций (порядка $n/2$). Поэтому рассматривать все параметры $\{\alpha_i^k, \beta_{ij}^k\}$ как изменяемые вряд ли целесообразно. Значительную часть параметров лучше задавать априорно, полагая их, например, равными нулю.

Простейший вариант квадратичного критерия получается при равенстве нулю всех β_{ij}^k , где $i \neq j$, т. е. при диагональной матрице $\|\beta_{ij}\|$. Тогда

$$W_k(x^k) = \sum_{i \in \bigcup_k I_P^k \cup I_R} \left[\alpha_i^k x_i^k + \frac{1}{2} \beta_i^k (x_i^k)^2 \right] \quad (16)$$

и общее число параметров сокращается до $2n$. Такой критерий предполагает, что цена каждого ресурса определяется объемом производства или затрат только этого ресурса и не зависит от других x_i^k

$$p_i^k = \alpha_i^k + \beta_i^k x_i^k. \quad (17)$$

Условность допущения об отсутствии перекрестных зависимостей очевидна, и оправданием ему может служить лишь успех эксперимента. Формула (17) поясняет смысл параметров α_i^k и β_i^k . Первые из них характеризуют некоторую постоянную составляющую цены, соответствующую нулевому объему производства или затрат; α_i^k всегда должны быть положительными. Параметры β_i^k являются показателями линейного изменения цены в зависимости от объема (первыми производными цены по объему). По своему смыслу они должны быть отрицательными как для продукции, так и для затрачиваемых ресурсов. В первом случае это вытекает из того, что цена продукции должна падать с увеличением объема производства. Во втором — из того, что для затрат $x_i^k < 0$, а цена должна возрастать с увеличением объема потребления.

Несмотря на свою простоту, локальный критерий (16) полностью обеспечивает возможность двойного регулирования: натурального и ценностного. Чтобы показать это, рассмотрим соотношение (1). Для (16) оно записывается

$$\alpha_i^{h(t+1)} + \beta_i^{h(t+1)} \bar{x}_i^{ht} = \bar{p}_i^{ht}, \quad (18)$$

где $\alpha_i^{h(t+1)}, \beta_i^{h(t+1)}$ — значения параметров α_i^h, β_i^h в локальном критерии W_k^{t+1} для $t+1$ -й глобальной итерации. Из (18) видно, что параметры α_i^h, β_i^h локальных критериев отраслей должны меняться как в зависимости от $\bar{x}^{ht}$, так и от $\bar{p}^{ht}$, т. е. как от пожеланий к натуральному составу отраслевых планов, так и от задаваемых цен. А это и означает двойное воздействие на локальные критерии отраслей W_k и тем самым на отраслевые планы x^h .

Чтобы пояснить, как конкретно осуществляется такое двойное воздействие, проведем некоторые преобразования локального критерия W_k^{t+1} . Его параметры $\alpha_i^{h(t+1)}$ с помощью (18) можно выразить через $\bar{p}^{ht}, \bar{x}^{ht}$ и $\beta_i^{h(t+1)}$

$$\alpha_i^{h(t+1)} = \bar{p}^{ht} - \beta_i^{h(t+1)} \bar{x}^{ht},$$

что позволяет представить W_k^{t+1} в виде

$$W_k^{t+1} = \sum_{i \in \bigcup_k I_P^k \cup I_R} \left[\bar{p}^{ht} x_i^k + \frac{1}{2} \beta_i^{h(t+1)} (x_i^k - \bar{x}^{ht})^2 - \frac{1}{2} \beta_i^{h(t+1)} (\bar{x}^{ht})^2 \right].$$

Отбрасывая последний член, не существенный для процесса оптимизации, получим

$$W_k^{t+1} = \sum_{i \in \bigcup_k I_P^k \cup I_R} \left[\bar{p}^{ht} x_i^k + \frac{1}{2} \beta_i^{h(t+1)} (x_i^k - \bar{x}^{ht})^2 \right]. \quad (19)$$

Первый член здесь выражает прибыль k -й отрасли, исчисляемую в ценах $\{\bar{p}^{ht}\}$, второй член — штраф за отклонение плана отрасли от наиболее желательного плана $\{\bar{x}^{ht}\}$ (имея в виду отрицательность параметров β_i^h).

Таким образом, сразу видна суть двойного регулирования: максимизируя W_k^{t+1} , отрасль, с одной стороны, стремится к максимуму прибыли в заданных ценах, но одновременно не заинтересована в слишком большом отклонении от задаваемого наиболее желательного плана. Пока нет полного соответствия между требованиями, выраженными в натуральной и ценностной форме, оптимальные отраслевые планы будут носить компромиссный характер, стремиться наилучшим образом вписаться и в межотраслевой баланс и в систему цен. Тем самым они будут максимально способствовать возникновению ситуации, когда между натурой и ценами установится полное соответствие, т. е. достижению равновесия.

Относительная эффективность натурального и ценностного регулирования зависит от удельного веса квадратичного члена в критерии (19). Чем больше коэффициенты β_i^h , тем более натуральный характер приобретает регулирование; наоборот, при $\beta_i^h \rightarrow 0$ оно становится чисто ценностным. Таким образом, квадратичный локальный критерий позволяет исследовать всю гамму алгоритмов многоступенчатой оптимизации, заключенную между предельными случаями: алгоритмом с использованием прибыли и алгоритмом чисто натурального типа. Это открывает возможность не только для рационального выбора характера регулирования, но и для его изменения в ходе процесса оптимизации. Конкретные эксперименты с квадратичным локальным критерием выполнялись на условной малоразмерной модели, упоминавшейся в предыдущем разделе. Целью экспериментов была не только проверка работоспособности алгоритма многоступенчатой оптимизации с квадратичным критерием и оценка его практической схожести, но и выяснение роли различных параметров локального критерия,

их влияния на сходимость процесса. Постановке экспериментов предшествовала разработка алгоритмов и программ для решения отраслевых задач с квадратичным критерием, а также межотраслевой задачи. Решение отраслевой и межотраслевой задач описано в [3, 4].

Вряд ли есть необходимость выписывать модели и алгоритмы, непосредственно использовавшиеся в экспериментах; они отличаются от изложенного в разд. 2—6 статьи [1] лишь тем, что отраслевые локальные критерии W_k конкретизированы в виде (16). Соответственно условие (1) фигурировало в форме (18). Непосредственно оно использовалось для пересчета параметров локального критерия, характеризующих выпускаемую продукцию отрасли. Параметры, относящиеся к затратам, определялись из (18) с учетом соотношений [1, (16)] и оценок лимитированных народнохозяйственных ресурсов. Из (18) видно, что число параметров локального критерия каждой отрасли вдвое превышает n — размерность вектора продукции и затрат x^k . Если все параметры считать изменяемыми, то для их полного пересчета необходима информация на двух глобальных итерациях. Первые эксперименты с квадратичным локальным критерием и были построены по этому принципу.

Пусть $\{\bar{x}_i^{k(t-1)}, \bar{p}_i^{k(t-1)}\}, \{\bar{x}_i^{kt}, \bar{p}_i^{kt}\}$ — результаты расчетов на двух соседних итерациях. Тогда на основании (18) можно составить следующую систему $2n$ уравнений для определения $2n$ неизвестных параметров $\alpha_i^{k(t+1)}, \beta_i^{k(t+1)}$

$$\begin{cases} \alpha_i^{k(t+1)} + \beta_i^{k(t+1)} \bar{x}_i^{k(t-1)} = \bar{p}_i^{k(t-1)}, \\ \alpha_i^{k(t+1)} + \beta_i^{k(t+1)} \bar{x}_i^{kt} = \bar{p}_i^{kt}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^{k(t+1)} &= \bar{p}_i^{kt} - \frac{\bar{p}_i^{kt} - \bar{p}_i^{k(t-1)}}{\bar{x}_i^{kt} - \bar{x}_i^{k(t-1)}} \bar{x}_i^{kt}, \\ \beta_i^{k(t+1)} &= \frac{\bar{p}_i^{kt} - \bar{p}_i^{k(t-1)}}{\bar{x}_i^{kt} - \bar{x}_i^{k(t-1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Однако эксперименты, основанные на таком способе определения параметров $\{\alpha_i^k, \beta_i^k\}$, не привели к хорошим результатам. Выяснилось, что коэффициенты β_i^k на первых итерациях не обладают достаточной стабильностью, а это существенно ухудшает сходимость процесса оптимизации.

В последующих экспериментах были опробованы различные способы стабилизации β_i^k : например, вычисление их не по двум, а по большему числу точек. Эти меры улучшили характер протекания процесса, но не дали радикального выхода из положения. Дело в том, что изучаемый итеративный процесс принадлежит к числу быстро сходящихся, и сложные методы стабилизации здесь не успевают сработать. Вместе с тем в ходе экспериментов постепенно складывалось убеждение, что фактор стабильности β_i^k гораздо важнее точного знания этих величин. Коэффициенты β_i^k должны быть достаточно большими, но какими именно — не столь существенно. Подтверждение этой точки зрения можно найти в (19) для локального критерия W . Формула показывает, что коэффициенты β определяют удельный вес штрафной составляющей W и тем самым относительную значимость натурального регулирования отраслевых планов. Штрафная составляющая нужна для того, чтобы быстро подтянуть отраслевые планы $\bar{x}^{kt}$ к планам $\bar{x}^{kt}$ и далее удерживать модель в этом состоянии.

С этой задачей штрафная составляющая может успешно справиться при любых достаточно больших значениях β .

Изложенные соображения привели к выводу о необходимости серии экспериментов с постоянными априорно задаваемыми значениями коэффициентов β_i^k . В этом случае изменяемыми параметрами локального критерия остаются только α_i^k , и из (18) сразу получаем

$$\alpha_i^{k(t+1)} = \bar{p}_i^{kt} - \beta_i \bar{x}_i^{kt}, \quad (21)$$

где β_i различны для разных видов ресурсов, но не зависят от номера отрасли и номера итерации. Пересчет параметров с помощью (21) может проводиться на основе данных, получаемых в рамках одной глобальной итерации. Это соответствует более простой схеме многоступенчатой оптимизации, чем при корректировке типа (20). Как показали дальнейшие эксперименты, именно такая схема является наиболее эффективной. Опишем эти эксперименты более подробно.

Каждый эксперимент начинался с выбора разумного начального состояния модели. Это состояние находилось в результате проведения одной вспомогательной глобальной итерации с более простым локальным критерием — критерием максимума продукции в задаваемом комплексе. Отсюда получались некоторые значения $\bar{x}^k$ и $\bar{p}^k$, которые принимались за исходные $\{\bar{x}^{k0}, \bar{p}^{k0}\}$. Начальные приближения можно было бы, разумеется, задавать и любым другим путем. Поэтому вспомогательную итерацию с комплектно-критерием не следует включать в общее число глобальных итераций основного процесса. Комплектный критерий давал не такие уж хорошие начальные приближения: просто он автоматизировал процесс их поиска, позволял найти некий эквивалент состояния реальной системы до начала процесса ее оптимизации.

Коэффициенты β_i далее задавались в соответствии с принципом равной эластичности цены по объему производства для всех видов ресурсов. Под эластичностью при этом понималась величина

$$\eta_i = \frac{d \ln p_i}{d \ln x_i} = \frac{x_i}{p_i} \frac{dp_i}{dx_i}. \quad (22)$$

Если эластичность равна для всех видов ресурсов, то штрафная составляющая W будет воздействовать примерно одинаково на все компоненты отраслевых планов, точнее говоря, обеспечивать примерно одинаковое относительное рассогласование между $\bar{x}^{kt}$ и $\bar{x}^{kt}$. Задавая в начальный момент некоторую эластичность η , не зависящую от i , и зная начальные значения $\{\bar{p}^{k0}, \bar{x}^{k0}\}$, из (22) получаем

$$\beta_i = \frac{dp_i}{dx_i} = \frac{\bar{p}_i^{k0}}{\bar{x}_i^{k0}} \eta. \quad (23)$$

Такие значения β_i и сохранялись в каждом эксперименте до его окончания.

Начальные значения α_i^{k0} определялись с помощью (21) по заданным $\bar{p}_i^{k0}$, $\bar{x}_i^{k0}$ и β_i , после чего начинался основной процесс — с квадратичным локальным критерием. Каждая итерация заканчивалась пересчетом параметров с помощью (21), затем начиналась следующая глобальная итерация. При проведении расчетов фиксировался момент достижения сбалансированного решения с заданной степенью точности, а также само это решение. Однако процесс продолжался далее, пока не оставалось сомне-

ний в том, что полученное решение является точкой равновесия. После проверки всех условий согласованного равновесия делался вывод, что достигнут абсолютный оптимум.

Экспериментальные расчеты были проведены для различных значений η : $-0,2$; $-0,5$; -1 ; -2 ; -5 ; -10 с тем, чтобы выяснить рабочий диапазон значений этой величины.

В результате расчетов выяснилось, что при слишком малых значениях η сходимость процесса существенно хуже, чем при других вариантах; с другой стороны, при больших η возникают слишком жесткие требования к точности счета, что также не дает возможности получить хорошую сходимость. Наиболее подходящими оказались значения η , равные (-1) — (-2) . В этом диапазоне скорость сходимости практически не менялась.

Главным итогом данной серии экспериментов следует считать полученные *абсолютного оптимума за четыре глобальные итерации*. Это, конечно, очень обнадеживающий результат, показывающий, что число глобальных итераций в системе оптимального планирования народного хозяйства может быть очень небольшим — такого же порядка, как при существующей практике балансового планирования. При этом в отличие от комплектного критерия при использовании квадратичного локального критерия достигается именно *абсолютный оптимум*, а не частичная оптимизация плана. Значение глобального критерия оптимальности U , достигаемое при использовании квадратичного локального критерия, оказалось значительно более высоким (на 10%), чем в случае комплектного локального критерия.

Вторым важным результатом следует считать подтверждение гипотезы относительно слабой зависимости процесса многоступенчатой оптимизации от удельного веса нелинейных составляющих локальных критериев, если только этот удельный вес достаточно велик. Отсюда следует, прежде всего, что предпосылка о наличии существенной зависимости цен от объемов производства является совершенно необходимой при построении многоступенчатой системы оптимизации. Но в то же время конкретные количественные характеристики этой зависимости могут варьироваться в достаточно широких пределах. Это в значительной мере снимает информационные трудности при построении зависимости цен от объемов производства.

При проведении дальнейших экспериментов с квадратичным локальным критерием была исследована роль верхнего уровня в процессе многоступенчатой оптимизации. Вообще говоря, многоступенчатая модель может достигать оптимума на основе чисто горизонтальных связей между отраслями по дробной номенклатуре ресурсов, т. е. без агрегирования, решения межотраслевой задачи и дезагрегирования. Роль «центра» тогда состояла бы только в создании условий для правильного протекания этого процесса, а не в активной разработке агрегированного межотраслевого плана. Как и следовало ожидать, эксперимент с полным отключением «центра» дал плохую сходимость процесса (более 20 итераций). Дело в том, что реальный экономический механизм никогда не начинает работать с произвольного несбалансированного состояния. Для обоснованного сравнения нужно создать более реальную ситуацию. Это можно сделать путем предварительного проведения одной или нескольких глобальных итераций с участием «центра», что дает начальное состояние, в той или иной мере приближенное к оптимуму.

Эксперименты привели к следующим результатам. После предварительного проведения одной итерации с участием «центра» число «горизонтальных» итераций сокращалось до 15, после двух — до 10, после трех — до 5. Наконец, четыре итерации с участием «центра» сразу приводили к оптимуму, и дальнейшие горизонтальные итерации нужны были только для проверки системы на устойчивость.

Из изложенного видно, что достижение оптимума возможно без межотраслевой задачи, на основе чисто горизонтальных связей. Но каждая итерация с участием «центра» в среднем в пять раз весомее, чем итерация чисто «горизонтального» типа. Следовательно, в процессе составления плана межотраслевая задача безусловно нужна, и «центр» не может ограничиться чисто пассивной ролью.

4. ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

Исследования, описанные в данной статье, не являются законченными и далеко не исчерпывают всех затронутых проблем. Они скорее говорят о необходимости дальнейших работ и более широких экспериментов. Тем не менее некоторые выводы могут быть уже сделаны.

Первый вывод касается общей оценки сходимости аппроксимационной схемы многоступенчатой оптимизации — схемы, основанной на максимально возможном обратимом сжатии информации. *Скорость сходимости оказалась довольно высокой при всех разумных вариантах локального критерия.*

Однако форма локального критерия далеко не безразлична. Линейный критерий (прибыль) дает относительно плохую сходимость и не гарантирует получения абсолютного оптимума. Критерий максимума комплекта продукции быстро приводит к сбалансированному и частично оптимизированному плану (за четыре глобальные итерации), но не приводит к абсолютному оптимуму. И только *квадратичный локальный критерий* позволяет построить быстро сходящийся процесс, выводящий систему на абсолютный оптимум. Эксперименты показали, что с помощью квадратичного локального критерия абсолютный оптимум может быть достигнут за те же четыре глобальных итерации. Таким образом, вторым важным выводом из проведенных исследований является *вывод о целесообразности использования квадратичного локального критерия.* Квадратичный локальный критерий соответствует гипотезе о линейной зависимости цен от объемов производства и потребления. Поэтому сформулированный вывод можно понимать как указание на необходимость использования в процессе оптимизации *механизма переменных цен* в его хотя бы самой простой (линейной) форме. Среди всех возможных форм квадратичного локального критерия вполне достаточной оказалась каноническая, с диагональной матрицей коэффициентов при квадратичных членах. Она не учитывает перекрестные зависимости цен от натуральных показателей, акцентируя внимание лишь на зависимости цены каждого ресурса от объема производства или потребления одного только этого ресурса.

Как показали эксперименты, коэффициенты при квадратичных членах должны быть достаточно большими. Но они могут выбираться в весьма широком диапазоне значений. Следовательно, *использование гипотезы переменных цен не создает дополнительных информационных трудностей.* Это — третий важный вывод.

Наконец, совершенно ясна роль «центра» (межотраслевой агрегированной задачи) в процессе оптимизации системы. «Центр» резко ускоряет сходимость процесса составления оптимального плана и поэтому является необходимым элементом многоступенчатой системы оптимизации.

Изложенным выводам можно дать соответствующую экономическую интерпретацию. Так, необходимость активного воздействия «центра» еще раз указывает на неприемлемость полностью децентрализованных механизмов оптимизации. Обладая плохой сходимостью, механизмы такого типа вряд ли могут перестраиваться с одного оптимального режима на другой в темпе современного технического прогресса. Локальный критерий

прибыли даже при централизованном его использовании также не дает хороших результатов. Это говорит о неудовлетворительности чисто ценностных механизмов централизованного управления экономикой. А таких механизмов было предложено довольно много как советскими, так и зарубежными авторами. Недостатки схемы с комплексным локальным критерием говорят о неприменимости чисто натуральных методов централизованного управления. С помощью одних этих методов также нельзя получить оптимум.

Квадратичный локальный критерий позволяет органически сочетать ценностное и натуральное регулирование. В этом секрет его преимущества. Следовательно, *сочетание методов ценностного и натурального регулирования можно рассматривать в качестве необходимого условия оптимального функционирования многоступенчатой системы управления.*

Возможность получения высокой практической сходимости многоступенчатого процесса оптимизации является весьма обнадеживающим результатом. Четыре глобальные итерации — это тот минимум, без которого не может обойтись и существующая практика балансового народнохозяйственного планирования. Следовательно, с помощью схемы многоступенчатой оптимизации можно проводить разработку планов в те же сроки, что и при существующих методах, но вместо сбалансированных планов получать оптимальные. От существующей практики система оптимального планирования отличается тем, что каждая глобальная итерация должна проводиться на основе решения локальных оптимизационных моделей. Причем модели должны представлять собой не беспорядочный набор, а строго увязанный *комплекс*, построенный в интересах максимально высокой сходимости процесса многоступенчатой оптимизации.

Вывод о преимуществах квадратичного локального критерия очень важен для правильного построения локальных моделей. *Локальные задачи должны решаться на максимум квадратичного критерия.* Как отмечалось выше, дополнительные информационные трудности при этом не возникают, а имеющийся опыт показывает, что сами локальные модели при использовании квадратичного критерия существенно упрощаются (см., например, [4]). Видимо, в соответствии с квадратичным критерием необходимо строить и стимулирование работников локальных хозяйственных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Пугачев, Г. В. Мартынов, В. Г. Медницкий, А. К. Пителин. Многоступенчатая оптимизация с локальным критерием общего вида. Экономика и матем. методы, 1972, т. VIII, вып. 5.
2. А. Г. Аганбегян, К. А. Багриновский. О задачах народнохозяйственного оптимума. Вопросы экономики, 1967, № 10.
3. Г. В. Мартынов, А. К. Пителин. Экспериментальные исследования аппроксимационной схемы многоступенчатой оптимизации. Экономика и матем. методы, 1969, т. V, вып. 4.
4. Г. В. Мартынов. Использование локального критерия народнохозяйственной эффективности в моделях текущего отраслевого планирования. Экономика и матем. методы, 1970, т. VI, вып. 1.

Поступила в редакцию
31 X 1972