ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1973 том IX, вып. 2

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ КЛАССИЧЕСКОГО АГРЕГИРОВАНИЯ В МОДЕЛИ МЕЖПРОДУКТОВОГО БАЛАНСА

Л. М. ДУДКИН, В. А. ХОМЯКОВ, Б. А. ЩЕННИКОВ

(Москва)

Статистика как наука имеет дело с исследованием различных усредненных показателей, появляющихся вследствие укрупнения исходной детализированной информации. Оперируя такими укрупненными показателями, необходимо уметь оценивать возможные ошибки при усреднении, а также определять условия, при которых ошибки минимальны с точки зрения того или иного критерия. Теория классического агрегирования дает аналитические приемы исследования потери информации, возникающей при формировании моделей, построенных в укрупненных показателях.

В данной статье приведен конспективный обзор основных результатов, полученных в работах по классическому агрегированию, существенно уточнены некоторые положения и доказательства и описаны новые результаты.

I. Модель межпродуктового баланса имеет вид $x_g=\sum\limits_{q=1}^{n}x_{gq}+y_g$, $g=1,\ldots,n$, где x_g — валовый выпуск продукции g-го вида; x_{gq} — затраты продукции g-го вида на производство всей продукции q-го вида; y_g — заданный конечный выпуск (конечное потребление) продукции g-го вида; n — число продуктов детализированной номенклатуры. Эту модель можно записать следующим образом: $x_g=\sum\limits_{q=1}^{n}(x_{gq}/x_q)x_q+y_g$, $g=1,\ldots,n$, или, определив

$$a_{gq}=\frac{x_{gq}}{x_q},\ g,q=1,\ldots,n, \tag{1}$$

получить

$$x_g=\sum_{q=1}^{n}a_{gq}x_q+y_g,\ g=1,\ldots,n. \tag{2}$$

Величина a_{gq}, как видно из ее определения,— количество продукции g-го вида, идущее на производство единицы продукции q-го вида. Такие показатели называют в экономике нормативами затрат, а в экономико-математической литературе — коэффициентами прямых затрат. Нормативы затрат по предположению не зависят от объема производства.

Укрупненная модель межпродуктового баланса, или так называемый межотраслевой баланс, составляется из сложения всех показателей валовых и конечных выпусков и затрат продуктов одного вида на другой, отнесенных к одной отрасли

$$x_i^* = \sum_{g \in M_i} x_g, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$y_i^* = \sum_{g \in M_i} y_g, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

$$x_{ij}^* = \sum_{g \in M_i} \sum_{q \in M_j} x_{gq}, \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

где M_i — множество продуктов детализированной номенклатуры, производимых в i-й отрасли; m — число отраслей в укрупненной модели; x_i^* — выпуск всей продукции i-й отрасли, т. е. выпуск всех производимых в i-й отрасли продуктов в совокупности; y_i^* — заданный конечный выпуск (конечное потребление) всей продукции i-й отрасли; x_{ij}^* — затраты всей продукции i-й отрасли на производство всей продукции j-й отрасли *.

Модель межотраслевого баланса, являющаяся укрупненной моделью межпродуктового баланса, имеет вид $x_i^* = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}^* + y_i^*, \quad i = 1, \ldots, m$. Она по-прежнему является моделью «затраты — выпуск», но в отличие от детализированной модели определяет равновесие в межотраслевом, а не в межпродуктовом разрезе. Перепишем ее в виде $x_i^* = \sum_{j=1}^{m} (x_{ij}^* / x_j^*) x_j^* + y_i^*$, $i = 1, \ldots, m$, или

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^* x_j^* + y_i^*, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

где нормативы затрат межотраслевого баланса вследствие (5), (3) и (1) равны

$$a_{ij}^* = \frac{x_{ij}^*}{x_j^*} = \frac{\sum\limits_{g \in M_i} \sum\limits_{q \in M_j} x_{gq}}{\sum\limits_{h \in M_j} x_h} = \frac{\sum\limits_{g \in M_i} \sum\limits_{q \in M_j} a_{gq} x_q}{\sum\limits_{h \in M_j} x_h} =$$

$$= \sum_{q \in M_j} \frac{x_q}{\sum\limits_{h \in M_j} x_h} \sum_{g \in M_i} a_{gq}, \qquad i, j = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

---

* Здесь предполагается, что все конкретные продукты одной отрасли имеют общие единицы измерения. Однако сказанное может быть обобщено и на случай, когда различные продукты даже одной отрасли имеют разные единицы измерения. Для этого придется лишь ввести коэффициенты перехода от специфических единиц измерения конкретных продуктов к общим единицам измерения, принимаемым для продуктов соответствующей отрасли.

Величина $p_q = x_q \Big/ \sum\limits_{h \in M_j} x_h$, $q \in M_j$, называется удельным весом q-го продукта в совокупном продукте отрасли j, $j = 1, \ldots, m$.

Решение исходной межпродуктовой модели является решением модели межотраслевого баланса, т. е. если

$$x_1 = \bar{x}_1, \ldots, x_n = \bar{x}_n \tag{8}$$

— решение задачи межпродуктового баланса (2) при заданных $y_1 = \bar{y}_1, \ldots, y_n = \bar{y}_n$, то $x_1^* = \sum\limits_{g \in M_1} \bar{x}_g, \ldots, x_m^* = \sum\limits_{g \in M_m} \bar{x}_g$ — решение задачи межотраслевого баланса (6) при $y_1^* = \sum\limits_{g \in M_1} \bar{y}_g, \ldots, y_m^* = \sum\limits_{g \in M_m} \bar{y}_g$. Действительно, пусть $x_1 = \bar{x}_1, \ldots, x_n = \bar{x}_n$, $y_1 = \bar{y}_1, \ldots, y_n = \bar{y}_n$. Складывая все уравнения системы (2), отнесенные к одной и той же отрасли, последовательно для всех отраслей, получим $\sum\limits_{g \in M_i} \bar{x}_g = \sum\limits_{g \in M_i} \sum\limits_{q=1}^{n} a_{gq} \bar{x}_q + \sum\limits_{g \in M_i} \bar{y}_g$, $i = 1, \ldots, m$, или

$$\sum_{g \in M_i} \bar{x}_g = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\sum\limits_{q \in M_j} \sum\limits_{g \in M_i} a_{gq} \bar{x}_q}{\sum\limits_{h \in M_j} \bar{x}_h} \right) \sum_{h \in M_j} \bar{x}_h + \sum_{g \in M_i} \bar{y}_g, \quad i = 1, \ldots, m.$$

При этом ввиду (7) и (8)

$$\frac{\sum\limits_{q \in M_j} \sum\limits_{g \in M_i} a_{gq} \bar{x}_q}{\sum\limits_{h \in M_j} \bar{x}_h} = \sum_{q \in M_j} \frac{\bar{x}_q}{\sum\limits_{h \in M_j} \bar{x}_h} \sum_{g \in M_i} a_{gq} = a_{ij}^*, \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

что и требовалось доказать.

Решение исходной детализированной модели межпродуктового баланса невозможно получить из-за чрезвычайно большой ее размерности. Поэтому вместо этой модели решают задачу межотраслевого баланса, чтобы получить хотя бы объемы выпуска продукции отраслей производства. Но для решения задачи межотраслевого баланса (6) необходимо, вообще говоря, знать коэффициенты прямых затрат (9), которые в свою очередь зависят от результата задачи межпродуктового баланса. В практике расчетов межотраслевого баланса коэффициенты прямых затрат определяют различными условными методами, например, принимают на плановый период коэффициенты, получающиеся при изучении их изменения во времени. Однако все эти методы можно интерпретировать в конечном итоге как формирование коэффициентов a_{ij}^* из a_{gq} и некоторых условных удельных весов

$$x_q^{(0)} \Big/ \sum_{h \in M_j} x_h^{(0)}, \qquad q \in M_j, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$a_{ij}^* = \sum_{q \in M_j} \frac{x_q^{(0)}}{\sum\limits_{h \in M_j} x_h^{(0)}} \sum_{g \in M_i} a_{gq}, \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{10}$$

где $x_q^{(0)}$ — ориентировочные размеры производства продукции q-го вида, $q=1,\ldots,n$. Если вместо действительных значений $x_q=\bar{x}_q$ в нормативах затрат модели межотраслевого баланса приняты ориентировочные значения $x_q=x_q^{(0)}$, то решение этой модели отличается от решения, которое получается, если нормативы затрат сформированы исходя из действительного решения $\bar{x}_q$. Задача, связанная с выяснением этой разницы, является весьма существенной.

Итак, дана модель межпродуктового баланса (2), которую можно записать в матричных обозначениях как

$$x=(I-A)^{-1}y, \tag{11}$$

где $x=(x_g)_1{}^n$ — вектор-столбец валового выпуска; $y=(y_g)_1{}^n$ — вектор-столбец конечного потребления; $A=[a_{gq}]_1{}^n$ — матрица коэффициентов прямых затрат.

Для решения задачи межотраслевого баланса строится в соответствии с (6), (4) и (10) агрегированная система

$$x^*=(I-A^*)^{-1}y^*, \tag{12}$$

где

$$y^*=Ty, \tag{13}$$

$$A^*=TAP(x^{(0)}). \tag{14}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$T=[t_{iq}]_{1,1}^{m,n}$ — агрегирующая матрица

$$T=\begin{bmatrix} 1\ldots 1\,0\ldots\ldots\ldots 0\\ 0\ldots 0\,1\ldots 1\,0\ldots\ldots 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 0\ldots\ldots\ldots 0\,1\ldots 1\end{bmatrix},$$

i-я строка которой характеризует продукты, отнесенные к i-й отрасли, т. е.*

$$t_{iq}=\begin{cases}1, & q\in M_i,\\ 0, & q\notin M_i,\end{cases}\qquad q=1,\ldots,n,\ i=1,\ldots,m;$$

$P(\gamma)=[p_{qj}(\gamma)]_{1,1}^{n,m}$ — весовая матрица

$$P(\gamma)=\begin{bmatrix} P_1(\gamma) & & 0\\ & P_2(\gamma) & \\ & & \ddots \\ 0 & & P_m(\gamma)\end{bmatrix},$$

у которой

$$p_{qj}(\gamma)=\begin{cases} p_q(\gamma)=\dfrac{\gamma_q}{\sum\limits_{h\in M_j}\gamma_h}, & q\in M_j,\\ 0, & q\notin M_j,\end{cases}\qquad q=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,m.$$

* Предполагается, что продукты расположены в порядке их объединения: продукты с номерами от 1 до s_1 — в первой отрасли, с номерами от s_1+1 до s_1+s_2 — во второй и т. д., так что количество продуктов i-й отрасли равно s_i, $\sum\limits_{i=1}^{m}s_i=n$.

Иными словами, $P_i(\gamma)$ — вектор-столбец размерности s_i, $i = 1, \ldots, m$ *; $\gamma = (\gamma_q)_1{}^n$ — вектор-столбец, удовлетворяющий условиям

$$\gamma_q \geqslant 0,\ q = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

$$\sum_{q \in M_j} \gamma_q \neq 0, \qquad j = 1, \ldots, m \tag{16}$$

(вектор-столбец $x^{(0)}$ ориентировочных размеров производства, очевидно, соответствует этим условиям).

Ошибка агрегирования Δ может быть определена как разность между решением агрегированной модели (12) — (14) и точным агрегатом детализированного решения модели межпродуктового баланса (11), т. е.

$$\begin{aligned}\Delta = x^* - Tx = (I - A^*)^{-1} y^* - T(I - A)^{-1} y = \\ = [(I - A^*)^{-1} T - T(I - A)^{-1}] y = Vy,\end{aligned} \tag{17}$$

где $V = (I - A^*)^{-1} T - T(I - A)^{-1}$.

Раскладывая обратные матрицы в (17) в ряд, получим $\Delta = [(I + A^* + A^{*2} + \ldots) T - T(I + A + A^2 + \ldots)] y = [(A^*T - TA) + (A^{*2}T - TA^2) + \ldots] y$. Ошибка агрегирования первого порядка Δ_1 может быть определена по формуле $\Delta_1 = (A^*T - TA) y = V_1 y$, где $V_1 = A^*T - TA$.

В теории классического агрегирования сформулированы следующие условия точного агрегирования и условия, при которых ошибка агрегирования первого порядка равна нулю.

1. Если вектор конечного потребления y пропорционален вектору $y^{(0)} = (I - A) x^{(0)}$, то агрегирование является точным. Это сформулировано и обосновано, например, в [1, стр. 200; 2, стр. 120] **.

2. Ошибка агрегирования первого порядка равна нулю, если выполняется условие [2, стр. 119]

$$\sum_{q \in M_j} \left(a_{ij}^* - \sum_{g \in M_i} a_{gq} \right) y_q = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, m. \tag{18}$$

3. Если (18) удовлетворяется для $y = y^{(0)}$, то ошибка агрегирования первого порядка равна нулю для векторов конечного потребления, составляющие которых пропорциональны соответствующим составляющим вектора $y^{(0)}$ в пределах каждой отрасли [2, стр. 120].

4. Если структура конечного потребления внутри каждой отрасли та же самая, что и соответствующая структура валового выпуска, ориентировочно принятого на плановый период, т. е. если $y_q = \left(x_q{}^{(0)} \Big/ \sum_{h \in M_j} x_h{}^{(0)} \right) \sum_{h \in M_j} y_h$, то ошибка агрегирования первого порядка равна нулю [3, стр. 121—122].

5. Для того чтобы агрегирование было точным при любом конечном потреблении, необходимо и достаточно, чтобы матрица коэффициентов удовлетворяла условию $A^*T = TA$ [4].

---

* Поскольку в дальнейшем не всегда $\gamma = x$, введена зависимость удельного веса p_q от γ: $p_q = p_q(\gamma)$.

** В литературе обычно рассматривают два варианта, первый из которых называется «базисным» или «отчетным», второй — «плановым». Это не совсем удобно, так как в задачах, связанных с отчетным и плановым периодами, нужно учитывать одновременно изменения не только конечного потребления, но и нормативов прямых затрат.

В [2] утверждениям 2 и 3 дана статистическая интерпретация, суть которой состоит в следующем. Поскольку

$$a_{ij}^* = \sum_{h\in M_j} p_h(x^{(0)}) \sum_{g\in M_i} a_{gh}, \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

$$y_j^* = \sum_{h\in M_j} p_h(x^{(0)}) \frac{y_h}{p_h(x^{(0)})}, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{q\in M_j} p_q(x^{(0)}) \left(a_{ij}^* - \sum_{g\in M_i} a_{gq}\right) = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, m,$$

то

$$\sum_{q\in M_j} \left(a_{ij}^* - \sum_{g\in M_i} a_{gq}\right) y_q =$$

$$= \sum_{q\in M_j} p_q(x^{(0)}) \left(-\sum_{g\in M_i} a_{gq} + a_{ij}^*\right)\left(\frac{y_q}{p_q(x^{(0)})} - y_j^*\right), \qquad i, j = 1, \ldots, m,$$

интерпретировано в [2] как корреляционные моменты между двумя случайными величинами, принимающими значения соответственно $-\sum\limits_{g\in M_i} a_{gq}$ и $y_q / p_q(x^{(0)})$ с вероятностью $p_q(x^{(0)})$, $q \in M_j$. Условия (18) в этом случае означают отсутствие таких корреляций.

Следует, однако, отметить, что указанная интерпретация не совсем корректна, так как корреляционные моменты выражаются через двумерные распределения вероятностей. Например, если p_{rq}, $r \in M_i$, $q \in M_j$,— такое распределение $\left(\sum\limits_{q\in M_j} p_{rq} = p_r(x^{(0)}),\ \sum\limits_{r\in M_i} p_{rq} = p_q(x^{(0)})\right)$, $i, j = 1, \ldots, m$, то соответствующие корреляционные моменты имеют вид

$$\sum_{r\in M_i} \sum_{q\in M_j} p_{rq} \left(-\sum_{g\in M_i} a_{gq} + a_{ij}^*\right)\left(\frac{y_r}{p_r(x^{(0)})} - y_j^*\right), \qquad i, j = 1, \ldots, m.$$

В [2, стр. 116] сформулированы «правила средних взвешенных» для матрицы V: $V(I - A)P(x^{(0)}) = 0$. Сущность правил средних взвешенных заключается в том, что любой вектор, являющийся линейной комбинацией вектор-столбцов матрицы $(I - A)P(x^{(0)})$, принадлежит ядру преобразования, которое задается матрицей V *. Поскольку все m столбцов матрицы $P(x^{(0)})$, очевидно, линейно независимы, а преобразование, задаваемое матрицей $I - A$, невырожденное, размерность этого подпространства равна m. Из сказанного следует

6. Если вектор конечного потребления y принадлежит m-мерному подпространству $Y = \{y\colon (I - A)P(x^{(0)})z = y,\ z \geqslant 0\}$, то агрегирование является точным.

Легко видеть, что подпространство Y содержит все векторы, пропорциональные вектору $y^{(0)} = (I - A)x^{(0)}$, так что утверждение 1 является частным случаем утверждения 6.

Аналогично из правил средних взвешенных для матрицы V_1 [2, стр. 118]: $V_1 P(x^{(0)}) = 0$, следует вывод

* Ядром преобразования, задаваемого некоторой матрицей C, называется подпространство $N(C) = \{x : Cx = 0\}$ (см., например, [5, стр. 746]).

7. Если вектор конечного потребления y принадлежит m-мерному подпространству $Y' = \{y: P(x^{(0)})z = y,\ z \geqslant 0\}$, то ошибка агрегирования первого порядка равна нулю.

Очевидно, утверждение 4 является частным случаем 7, которое само является частным случаем 2. В самом деле, левую часть в (18) можно представить в виде $\sum_{q \in M_j} y_q \overset{*}{a}_{ij} - \sum_{q \in M_j} y_q \sum_{g \in M_i} a_{gq}$, $i, j = 1, \ldots, m$. Поэтому при $y_q = z_j p_q(x^{(0)})$, $q \in M_j$, $j = 1, \ldots, m$, система равенств (18) имеет место.

Таким образом, если для построения матрицы коэффициентов межотраслевого баланса использовать вектор валового выпуска, полученный в результате решения модели межпродуктового баланса, то межотраслевой баланс описывается укрупненной моделью межпродуктового баланса. Если же для построения матрицы коэффициентов взять произвольный вектор γ, удовлетворяющий условиям (15) и (16), то получается некоторая агрегированная система $x^* = (I - A^*)^{-1} y^*$, где $y^* = Ty$, $A^* = TAP(\gamma)$. Когда вектор γ совпадает с вектором $x^{(0)}$ ориентировочных размеров производства на плановый период, не обязательно являющимся решением модели межпродуктового баланса, то при определенных условиях (см. утверждения 1—7) агрегированная модель позволяет определить объем выпуска агрегированной продукции на плановый период.

Исследование агрегированной модели для определения агрегированных размеров производства полезно также и в том случае, когда вектор γ вообще не является вектором валового выпуска: доказательства, помещенные в соответствующих местах цитированной литературы, справедливы и в том случае, если всюду в них вектор $x^{(0)}$ заменить вектором γ произвольной экономической природы, удовлетворяющим условиям (15) и (16).

II. Утверждение 5 занимает особое место в силу того, что при его соблюдении агрегирование является точным независимо от величины составляющих вектора конечного потребления. Следует, однако, отметить, что доказательство необходимости условия $A^*T = TA$ в [4] проведено не корректно. В самом деле, поскольку

$$(I - A)x = y \tag{19}$$

и

$$(I - A^*)x^* = y^*, \tag{20}$$

где $y^* = Ty$, имеем $A^*x^* - TAx = x^* - Tx$. Так как $x^* = Tx$ для любого вектора конечного потребления, получается тождество относительно $y \geqslant 0$

$$(A^*T - TA)x = 0. \tag{21}$$

Поскольку элементы матрицы $(I - A)^{-1}$ положительны, пространство $Q = \{z\colon (I - A)^{-1}y = z,\ y \geqslant 0\}$, очевидно, является собственным подпространством пространства $R = \{x\colon x \geqslant 0\}$, и поэтому неясно, по какой причине (21) можно считать тождеством относительно $x \geqslant 0$, как это сделано в [4].

Условие $A^*T = TA$ [4] можно доказать следующим образом. Вследствие того что $x = (I - A)^{-1}y$, (21) можно записать в виде

$$(A^*T - TA)(I - A)^{-1}y = 0. \tag{22}$$

Матрица $(I - A)^{-1}$ неособенная, следовательно, размерность пространства Q равна n. Тогда из (22) вытекает, что ранг матрицы $A^*T - TA$ должен быть равен нулю, т. е. $A^*T = TA$. Достаточность условия Хатанака доказана, например, в [2, стр. 119]. В [6, стр. 260] отмечено свойство матриц коэффициентов прямых затрат межпродуктового баланса, удовлетворяющих условию Хатанака.

Пусть A_{ij} — подматрица матрицы A, каждый элемент которой расположен на пересечении g-й строки и q-го столбца матрицы A, $g \in M_i$, $q \in M_j$. Размерность подматрицы A_{ij}, как легко видеть, равна $s_i \times s_j$. Тогда условие $A^*T = TA$ выполняется в том и только в том случае, если суммы всех элементов каждого из столбцов подматрицы A_{ij}, $i, j = 1, \ldots, m$, равны между собой. Необходимость этого утверждения очевидна.

Достаточность. Обозначим через e_i вектор-строку, состоящую из s единиц. Поскольку, с одной стороны, $\sum\limits_{g \in M_i} a_{gq} = a_{ij}$ не зависит от $q \in M_j$, то $e_i A_{ij} = a_{ij} e_j$, $i, j = 1, \ldots, m$; с другой стороны, $a_{ij}^* = \sum\limits_{q \in M_j} p_q(\gamma) \sum\limits_{g \in M_i} a_{gq} = a_{ij} \sum\limits_{q \in M_j} p_q(\gamma) = a_{ij}$. Последние два соотношения означают, что $A^*T = TA$.

Таким образом, предполагая вектор конечного потребления любым, мы вынуждены, чтобы агрегирование было точным, наложить неестественные с экономической точки зрения ограничения на матрицу коэффициентов. Однако, как отмечалось в [4], если матрица коэффициентов удовлетворяет условию Хатанака приближенно, нет никаких оснований ожидать больших погрешностей агрегирования. И действительно, доказано [7, стр. 100—101], что малость элементов матрицы $A^*T - TA$ влечет за собой малые погрешности агрегирования. Получим, аналогично тому, как это было сделано в [7], верхнюю оценку ошибки агрегирования. Определим норму $\|C\|$ произвольной матрицы C как

$$\|C\| = \max_q \sum_{g=1}^{n} |c_{gq}|.$$

Отсюда норма $\|z\|$ некоторого вектора z равна

$$\|z\| = \sum_{g=1}^{n} |z_g|.$$

Ввиду того, что

$$\|Vy\| \leqslant \|V\| \|y\|,$$
$$\|BC\| \leqslant \|B\| \|C\|,$$
$$\Big\|\sum_k A^{(k)}\Big\| \leqslant \sum_k \|A^{(k)}\|,$$
$$\|A\| \leqslant 1, \ \|A^*\| \leqslant 1,$$

где B, C и $A^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, — произвольные матрицы, можно записать

$$\begin{aligned}\|\Delta\| &= \|x^* - Tx\| = \|Vy\| \leqslant \|(I - A^*)^{-1} T - T(I - A)^{-1}\| \|y\| = \\ &= \|(I - A^*)^{-1}(A^*T - TA)(I - A)^{-1}\| \|y\| \leqslant \\ &\leqslant \|I + A^* + A^{*2} + \ldots\| \|A^*T - TA\| \|I + A + A^2 + \ldots\| \|y\| \leqslant \\ &\leqslant (1 + \|A^*\| + \|A^*\|^2 + \ldots) \|A^*T - TA\| (1 + \|A\| + \|A\|^2 + \ldots) \|y\| = \\ &= \frac{\|A^*T - TA\|}{(1 - \|A\|)(1 - \|A^*\|)} \|y\|. \end{aligned} \tag{23}$$

Верхняя оценка пропорциональна норме матрицы $A^*T - TA$, что и требовалось доказать.

Если наложить ограничения на часть составляющих вектора конечного потребления, то могут быть получены практически важные результаты. В [3, стр. 122—123] рассмотрена следующая постановка задачи. Пусть часть продуктов не объединена ни с какими другими продуктами. Требуется определить точность агрегирования, если вектор конечного потребления отличается от вектора $y^{(0)}$ только теми составляющими, которые соответствуют неагрегированным продуктам*. Остановимся подробнее на этом вопросе.

Пусть в межотраслевом балансе h-й и q-й продукты не агрегированы, $\gamma = x^{(0)}$ и $y_g = y_g^{(0)}$, $g = 1, \ldots, n$, $g \neq h$, $g \neq q$; $y_h = y_h^{(0)} + \Delta y_h$, $\Delta y_h \neq 0$; $y_q = y_q^{(0)} + \Delta y_q$, $\Delta y_q \neq 0$. В [3] показано, что при этих условиях

$$V_1 \Delta y = (A^* T - TA) \Delta y = 0, \tag{24}$$

где $\Delta y = y - y^{(0)}$.

Поскольку $\gamma = x^{(0)}$, а $x^{(0)}$ по определению — решение межпродуктового баланса, соответствующее вектору $y^{(0)}$, то $\Delta^{(0)} = V y^{(0)} = 0$ (см. п. I). Следовательно,

$$\Delta = Vy = V(y - y^{(0)}) = V \Delta y. \tag{25}$$

Отсюда делается вывод, что

$$\Delta_1 = V_1 y = V_1 \Delta y = (A^* T - TA) \Delta y, \tag{26}$$

и вследствие (24) $\Delta_1 = 0$. На основании этого формулируется следующее утверждение (см. [3, стр. 122, теорема 2]): если некоторые продукты не агрегированы и вектор конечного потребления отличается от вектора $y^{(0)}$ только теми составляющими, которые соответствуют неагрегированным продуктам, то ошибка агрегирования первого порядка всегда равна нулю независимо от способа объединения остальных продуктов.

Однако второе равенство (26) ($V_1 y = V_1 \Delta y$) не следует из (25). Вместо этого из (24) можно получить $\Delta_1 = V_1 y = V_1 y^{(0)} = \Delta_1^{(0)}$. Кроме того, если $y = ky^{(0)} + \Delta y$, где $k \neq 0$ — скаляр, а все составляющие вектор-столбца Δy за исключением, может быть, h-й и q-й, равны нулю, то $V_1 y = V_1 k y^{(0)} + V_1 \Delta y = k V_1 y^{(0)}$.

Таким образом, окончательно теорема сформулируется следующим образом: *пусть вектор конечного потребления пропорционален вектору $y^{(0)}$ (за исключением, возможно, компонент, которые не агрегированы), причем коэффициент пропорциональности отличен от нуля. Тогда ошибка агрегирования является ошибкой второго порядка в том и только в том случае, если при данном агрегировании ошибка $V_1 y^{(0)} = 0$.*

Заметим, что в последнем варианте теоремы уже не обязательно $\gamma = x^{(0)}$.

III. В [7, стр. 103—105] исследована ошибка агрегирования в случае, когда конечное потребление продуктов пропорционально соответствующим составляющим вектора $y^{(0)}$ в пределах каждой отрасли, а $\gamma = y^{(0)}$ **. Сформулированное при этом утверждение не совсем точно.

* В [3] исследование проводится с использованием понятий «базисного», или «планового», периода (см. сноску на стр. 235). Кроме того, в [3] продукту соответствует сектор, а отрасли — гибридный сектор.

** В [7] продукту соответствует отрасль, а отрасли — укрупненная отрасль. Кроме того, объем валовых выпусков и конечного потребления, ориентировочно принятый на плановый период, рассматривается как выпуск и потребление «базисного», или «отчетного», года (см. сноску на стр. 235). Согласно этому, связь выпуска и потребления соответственно с выпуском и потреблением, ориентировочно принятыми на плановый период, представляется как «темпы роста» производства и потребления.

Пусть все продукты могут быть разбиты на группы так, что конечное потребление продуктов пропорционально соответствующим составляющим вектора $y^{(0)}$ в пределах каждой группы. Тогда утверждается, что при $\gamma = y^{(0)}$ сумма квадратов отклонений

$$\sum_{i=1}^{m}\left(x_i^{\cdot} - \sum_{g\in M_i} x_g\right)^2 \tag{27}$$

равна нулю, если в каждую отрасль объединить только те продукты, которые входят в одну и ту же группу. Таким образом, сформулированное правило объединения продуктов выступает как критерий точного агрегирования.

В качестве иллюстрации приводится пример

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad y^{(0)} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 80 \\ 20 \end{bmatrix},\quad y = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \\ 160 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Согласно правилу агрегирования, следует объединить первый продукт со вторым и третий с четвертым. Действительно, поскольку

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad P\left(y^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix},$$

получается, что

$$x_1 = 252,\ x_2 = 182,\ x_1 + x_2 = 434,\ x_1^* = 434,$$
$$x_3 = 172,\ x_4 = 40,\ x_3 + x_4 = 212,\ x_2^* = 212,$$

т. е. сумма квадратов (27) равна нулю.

Если же проводить агрегирование по схеме $1+4$ и $2+3$, то получается худший результат *:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad \tilde{P}\left(y^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}8 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 292,\ \tilde{x}_1^* = 374,$$
$$\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 = 354,\quad \tilde{x}_2^* = 576\ ^{**}.$$

В [7, стр. 103] приводится следующее обоснование такого способа агрегирования. Решение межотраслевого баланса имеет вид

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}^* y_j^*,\qquad i = 1, \ldots, m, \tag{28}$$

* При проведении агрегирования по второй схеме продукты расположены в порядке 1, 4, 2, 3.

** В [7, стр. 105] допущена ошибка в вычислениях: $\tilde{x}_1^* = 241$, $\tilde{x}_2^* = 511$.

где $[b_{ij}^*] = (I - A^*)^{-1}$, а точный агрегат решения межпродуктового баланса —

$$\sum_{g\in M_i} x_g = \sum_{g\in M_i} \sum_{q=1}^{n} b_{gq} y_q, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{29}$$

где $[b_{gq}] = (I - A)^{-1}$.

Подстановка (28) и (29) в (27) дает

$$\sum_{j=1}^{m} \Bigl(b_{ij}^* \sum_{q\in M_j} y_q - \sum_{g\in M_i} \sum_{q=1}^{n} b_{gq} y_q \Bigr)^2 = \sum_{j=1}^{m} \Bigl[\Bigl(b_{ij}^* - \sum_{g\in M_i} b_{gq} \Bigr) \sum_{q\in M_j} y_q \Bigr]^2. \tag{30}$$

Вариация коэффициентов b_{ij}^* вызывается только тем, что объемы продукции не пропорциональны объемам продукции, ориентировочно принятым на плановый период. Поэтому если $P(y^{(0)}) = P(y)$, то значение (27) равно нулю. Совершенно очевидно, что это условие эквивалентно требованию пропорциональности элементов конечного потребления.

По этому обоснованию можно сделать следующее замечание. Прежде всего, если подставить (28) и (29) в (27), получим вместо (30)

$$\sum_{i=1}^{m} \Bigl(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}^* y_j^* - \sum_{g\in M_i} \sum_{q=1}^{n} b_{gq} y_q \Bigr)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Bigl(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}^* \sum_{q\in M_j} y_q - \sum_{g\in M_i} \sum_{j=1}^{m} \sum_{q\in M_j} b_{gq} y_q \Bigr)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Bigl[\sum_{j=1}^{m} \Bigl(b_{ij}^* \sum_{q\in M_j} y_q - \sum_{q\in M_j} y_q \sum_{g\in M_i} b_{gq} \Bigr) \Bigr]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Bigl\{ \sum_{j=1}^{m} \Bigl[\sum_{q\in M_j} y_q \Bigl(b_{ij}^* - \sum_{g\in M_i} b_{gq} \Bigr) \Bigr] \Bigr\}^2. \tag{31}$$

Отсутствие вариации коэффициентов b_{ij}^* не является достаточным условием равенства нулю квадратичной формы (31).

Можно также привести пример, когда применение сформулированного правила не дает лучшего результата. Так, если изменить численные значения в матрице коэффициентов приведенного выше примера

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix},$$

получим при агрегировании по первой схеме

$$x_1 = 772,\ x_2 = 604,\ x_1 + x_2 = 1376,\ x_1^* = 1250,$$
$$x_3 = 713,\ x_4 = 593,\ x_3 + x_4 = 1306,\ x_2^* = 1250,$$

а по второй

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 1365,\ \tilde{x}_1^* = 1365,$$
$$\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 = 1317,\ \tilde{x}_2^* = 1317.$$

Таким образом, применение правила объединения продуктов, предложенного в [7], не обеспечивает точного агрегирования и не минимизирует квадратичную форму (27). Тем не менее можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Пусть $\gamma = y^{(0)}$ *. Если составляющие вектора конечного потребления пропорциональны соответствующим составляющим вектора $y^{(0)}$ в пределах каждой отрасли, то ошибка агрегирования первого порядка равна нулю.*

Доказательство. В условиях теоремы вектор конечного потребления, очевидно, является линейной комбинацией векторов-столбцов весовой матрицы, и доказательство следует из утверждения 7 (п. I).

Заметим, что из теоремы следует $V_1 y^{(0)} = 0$ при $\gamma = y^{(0)}$; видно также, что способ агрегирования, предложенный в [7], дает хорошие результаты.

Авторы благодарят В. В. Коссова за ценные замечания при обсуждении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Malinvaud. Aggregation Problems in Input — Output Models. The Structural Interdependence of the Economy. N. Y., John Wiley and Sons, 1954.
2. H. Theil. Linear Aggregation in Input — Output Analysis. Econometrica, 1957, v. 25, N 1.
3. Y. Morimoto. On Aggregation Problems in Input — Output analysis. Rev. Econ. Studies, 1970, v. 37, N 1.
4. M. Hatanaka. Note on Consolidation within a Leontief System. Econometrica, 1952, v. 20, N 2.
5. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
6. K. Ara. The Aggregation Problem in Input — Output Analysis. Econometrica, 1959, v. 27, N 2.
7. В. В. Коссов. Межотраслевой баланс. М., «Экономика», 1966.

Поступила в редакцию
24 IV 1972

* На практике возможен случай, при котором вся продукция какой-либо отрасли является промежуточным продуктом, т. е. $\sum_{q \in M_j} y_q^{(0)} = 0$. Тогда в качестве величин γ_q, $q \in M_j$, следует взять произвольные неотрицательные числа так, чтобы $\sum_{q \in M_j} \gamma_q \neq 0$