

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ УПРАВЛЕНИЯ ХОЗЯЙСТВОМ

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПРОДУКТА ПУТЕМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАТРАТ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ЦЕНАМ РАВНОВЕСИЯ

Н. И. ВЕДУТА, В. А. ЖУРАВЛЕВ

(Минск)

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА

В статье рассматривается динамическая модель производства потребительских продуктов при наличии цен равновесия. Цены равновесия, обеспечивающие равенство спроса и предложения в каждый момент времени, определяются как в [1—3]. В [1, 2] при некоторых предположениях было установлено существование цен равновесия для любого, постоянного по структуре и объему, вектора потребительских продуктов. В настоящей работе решается задача выхода растущего по объему производства потребительских продуктов на оптимальную в определенном смысле структуру. Полученный для рассматриваемой модели асимптотический результат можно отнести к магистральным теоремам [4], в отличие от которых здесь задана зависимость выпуска потребительских продуктов с помощью дифференциальных уравнений. Последние содержат свободный для выбора в каждый момент времени вектор управления $k(t)$, который имеет смысл вектора капитальных вложений, приходящихся на единицу выпускаемого в момент времени t продукта. Кроме того, в модель вводится вектор себестоимости единицы продукта $c(t)$, изменяющийся в зависимости от капитальных вложений — с ними связано, как правило, внедрение новой техники. В статье доказано, что если выбирать капитальные вложения в зависимости от цен равновесия продукта и его себестоимости таким образом, чтобы суммарные затраты по каждому продукту, составляющему набор, в течение всего времени были пропорциональными ценам равновесия, то будет иметь место сходимость структуры выпускаемого продукта и оптимальной структуры потребления [5]. Иными словами, векторы себестоимости и цен равновесия позволяют осуществлять оптимальное управление капитальными вложениями.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Как обычно, объем и структура потребительского продукта представлена в виде вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного евклидова пространства ($x_i \geq 0$ — количество i -го продукта в этом наборе, n — число различных продуктов, составляющих набор). В дальнейшем термины «вектор продукта», «набор продуктов» относятся к совокупности продуктов, а «продукт» — к отдельным качественно различающимся продуктам, составляющим совокупность.

Нормированную цену равновесия i -го продукта обозначим через p_i и везде предположим неотрицательность

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Нормировка задается бюджетным ограничением

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = P. \quad (2)$$

Вектор цен равновесия $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ определим как функцию набора продуктов x и бюджетного ограничения P , принимающую все возможные значения внутри положительного ортанта. Зависимость вектора цен равновесия p от вектора продукта x определяется матрицей

$$u(x, P) = \left\| \frac{\partial p_i(x, P)}{\partial x_j} \right\|, \quad (3)$$

на которую наложим следующие ограничения

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} > 0, \quad i \neq j.$$

Экономическое истолкование соотношений (4) следующее: если выпуск i -го продукта увеличивается при неизменном выпуске всех остальных продуктов и том же бюджетном ограничении (2), то цена равновесия i -го продукта может только уменьшиться, а цены равновесия всех остальных продуктов только увеличиться.

Учитывая эту зависимость, (2) перепишем в виде скалярного произведения

$$(p(x, P), x) = P. \quad (5)$$

Кроме условий (4) потребуем, чтобы вектор-функция цен равновесия $p(x, P)$ обладала свойствами однородности по каждому из своих аргументов x и P в отдельности, а именно пусть $p(x, P)$ будет положительно однородной функцией степени 1 по P и степени -1 по x , т. е.

$$\lambda p(\lambda x, P) = p(x, P), \quad p(x, \lambda P) = \lambda p(x, P) \quad (6)$$

для любого $\lambda > 0$. Достаточно потребовать выполнения соотношений (6) в окрестности значения $\lambda = 1$, что допустимо для фиксированного момента времени. Из (6) очевидно

$$p(\lambda x, \lambda P) = p(x, P) \quad (7)$$

для любого $\lambda > 0$, т. е. функция $p(x, P)$ — положительно однородная функция степени нуль по совокупности своих аргументов. Это означает, что увеличение выпуска продукта в момент времени t в λ раз (λ в малой окрестности единицы) при постоянной платежной способности потребителя приведет к снижению цен равновесия во столько же раз, а увеличение платежной способности потребителя в λ раз при неизменном выпуске продукта приводит к увеличению цен равновесия во столько же раз.

Если продифференцировать соотношения (6) по λ в точке $\lambda = 1$, получим

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_j} x_j + p_i = 0, \quad P \frac{\partial p_i}{\partial P} = p_i \quad (8)$$

или в матричном виде

$$Ux + p = 0, \quad (9)$$

где U — матрица (3).

Рассмотрим бюджетное ограничение (5). Продифференцировав его по x_j , имеем еще одно соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_j} x_i + p_j = 0$$

или в матричном виде

$$U^T x + p = 0, \quad (10)$$

где U^T — матрица, полученная транспонированием матрицы U . Объединяя (10) и (9), запишем систему соотношений

$$Ux + p = 0, \quad U^T x + p = 0. \quad (11)$$

Теперь сформулируем следующую лемму.

Лемма 1. Если матрица U удовлетворяет соотношениям (4) и (11), то она отрицательно квазиопределена, т. е. $(Ux, x) < 0$ для всех $x \neq 0$.

Доказательство можно найти в [3, стр. 357].

Теперь предположим, что вектор потребительского продукта x и бюджетное ограничение P -функции времени t , которые определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i k_i x_i, \quad \frac{dP}{dt} = \mu P, \quad (12)$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad P(t_0) = P_0.$$

Экономическая интерпретация этих уравнений следующая: a_i — величины, обратные удельным капитальным вложениям, приходящимся на единицу прироста выпуска i -го продукта; k_i — капитальные вложения, приходящиеся на единицу выпускаемого i -го продукта; $\mu > 0$ — коэффициент, характеризующий темп роста бюджетного ограничения во времени, связанного с ростом ресурсов труда.

Как видно из (12), $k_i x_i$ — весь объем капитальных вложений, затрачиваемый в момент времени t на развитие производства i -го продукта, а $a_i k_i x_i$ — интенсивность прироста производства i -го продукта в момент времени t за счет капитальных вложений. Вектор $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, входящий в правую часть системы (12), — не что иное, как вектор управления; он предполагается свободным для выбора в каждый момент времени. Таким образом, задавшись произвольной вектор-функцией капитальных вложений $k(t)$, мы из системы уравнений (12) однозначно получим процесс наращивания вектора продукта $x(t)$. Меняя значение функции $k(t)$, будем получать различные траектории увеличивающегося выпуска продуктов $x(t)$, выходящие из начальной точки x^0 .

Потребуем теперь, чтобы выбор вектора управления k в любой момент времени t был подчинен ограничению

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i(t) = (k, x(t)) = \beta P(t), \quad k \geq 0, \quad (13)$$

где β — постоянный коэффициент, $0 < \beta < 1$. Ограничение (13) имеем очевидную экономическую интерпретацию: общий объем капитальных влс-

жений, затрачиваемых на развитие производства всех продуктов, равен некоторой части β бюджетного ограничения P .

Очевидно, изменение вектора цен равновесия p под воздействием процесса, описываемого уравнениями (12), будет выражаться системой уравнений

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^n u_{ij}(x, P) \frac{dx_j}{dt} + \mu p_i,$$

$$p_i(t_0) = p_i(x^0, P_0) \quad (14)$$

или в матричной записи

$$\frac{dp}{dt} = U \frac{dx}{dt} + \mu p.$$

Здесь для краткости $p = p(x(t), P(t)) = p(x, t)$; $U(x(t), P(t)) = U(x, t) = U$.

Легко убедиться, что системы уравнений (12) и (14) не противоречат бюджетному ограничению (5). Действительно, дифференцируя (5) по t и используя свойство (11), получим

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \left(\frac{dp}{dt}, x \right) + \left(p, \frac{dx}{dt} \right) = \left(U \frac{dx}{dt} + \mu p, x \right) + \left(p, \frac{dx}{dt} \right) = \\ &= \left(U \frac{dx}{dt}, x \right) + \mu P + \left(p, \frac{dx}{dt} \right) = \mu P. \end{aligned}$$

Для определения оптимального вектора выпуска продукта в момент времени t , который обозначим через $x^*(t)$, и доказательства его существования и единственности рассмотрим систему уравнений (12) и ограничение

$$(13): \text{Они вместе дают соотношение: } \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n r_i x_i(t) = \beta P(t), \text{ где } r_i = a_i^{-1}.$$

Отсюда $\sum_{i=1}^n r_i x_i(t) = \sum_{i=1}^n r_i x_i^0 + \beta \mu^{-1} (P(t) - P_0)$, или в виде скалярных произведений: $(r, x(t)) = (r, x^0) + \beta \mu^{-1} (P(t) - P_0)$.

Это означает, что при любом выборе капитальных вложений за период времени от t_0 до t , подчиненных ограничению (13), вектор выпуска продукта в фиксированный момент времени t всегда лежит на гиперплоскости

$$(r, x) = (r, x^0) + \beta \mu^{-1} (P(t) - P_0), \quad (15)$$

и поэтому бюджетное ограничение для точек гиперплоскости (15) одно и то же и равно $P(t)$.

Обозначим пересечение гиперплоскости (15) с положительным ортантом через $\pi(t)$, т. е. $\pi(t) = \{x: (r, x) = (r, x^0) + \beta \mu^{-1} (P(t) - P_0), x \geq 0\}$.

Введем множество элементов $\pi^*(t)$, двойственных к элементам множества $\pi(t)$, которое определим следующим образом: $\pi^*(t) = \{p: p = p(x, t), x \in \pi(t)\}$.

Смысл этих множеств следующий: $\pi(t)$ — множество всех тех наборов продуктов, которые можно произвести в момент времени t , а выбор конкретного значения $x \in \pi(t)$ определяется управлением капитальными вложениями за предшествующий период времени; $\pi^*(t)$ — множество возможных в момент времени t цен равновесия, зависящих от выбора вектора продукта x из множества $\pi(t)$. Дадим следующее

Определение. Вектор потребительского продукта $x^*(t)$ называется оптимальным в момент времени t , если

- 1) $x^*(t) \in \pi(t)$,
- 2) $(p, x^*(t)) > (p(x^*(t), t), x^*(t))$, для всех $p \in \pi^*(t)$, $p \neq p(x^*(t), t)$.

(16)

Если теперь учесть, что для всех $x \in \pi(t)$ и $p \in \pi^*(t)$ имеет место соотношение $(p(x, t), x) = P(t)$, то оптимальному вектору продукта можно дать также и другое, эквивалентное

Определение. Вектор $x^*(t) \in \pi(t)$ называется оптимальным в момент времени t , если

$$\min_{p \in \pi^*(t)} (p, x^*(t)) = P(t).$$

Экономический смысл свойства (16) вектора $x^*(t)$ в том, что объем оптимального в момент времени t продукта, выраженный в его ценах равновесия, меньше, чем объем того же продукта, выраженный в ценах равновесия любого другого набора продуктов, который может быть получен в тот же момент времени при одних и тех же начальных значениях x^0 и ограничениях по капитальным вложениям.

Отметим, что в случае, когда цены равновесия индуцируются некоторой функцией удовлетворения потребностей $v(x)$, обладающей обычными свойствами и еще (6), то такой вектор как раз и обеспечивает $\max v(x)$ для $x \in \pi(t)$.

Теорема 1. Вектор цен равновесия оптимального продукта $x^*(t)$ пропорционален вектору удельных капитальных вложений r , однозначно определяющему продукт $x^*(t)$.

Как было определено, всякий вектор $p \in \pi^*(t)$ может быть задан функцией $p(x, t)$, где $x \in \pi(t)$. Тогда доказательство теоремы сводится к решению следующей экстремальной задачи

$$G(x) = (p(x, t), x^*(t)) \xrightarrow{x} \min, \\ (r, x) = \text{const.}$$

Применяя для нахождения стационарных точек функции $G(x)$ на гиперплоскости (15) правило множителей Лагранжа, получим, что в стационарной точке должно выполняться соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i(x^*(t), t)}{\partial x_j} x_i^*(t) = \lambda r_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Теперь из соотношений (11) вытекает, что стационарная точка $x^*(t)$ есть корень уравнения

$$p(x, t) = \frac{P(t)}{(r, x(t))} r. \quad (18)$$

Значение λ было получено после умножения обеих частей (18) на $x(t)$. Из изложенного в первом разделе следует, что такой корень существует и единственным образом определен.

Осталось установить, что найденная стационарная точка есть действительно точка минимума функции $G(x)$, т. е. представляет собой оптимальное значение выпуска в момент времени t . Для этого выберем произвольный вектор $x \in \pi(t)$ и введем функцию

$$h(\theta) = (p(x(\theta), t) - p(x^*(t), t), x^*(t)), \\ x(\theta) = x^*(t) + \theta(x - x^*(t)), \quad (19)$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

Из (15) следует, что $(r, x - x^*(t)) = 0$ и поэтому $x(\theta) \in \pi(t)$ для всех θ . Теперь покажем, что $h(0) = h'(0) = 0$ и $h''(0) > 0$, если только не выполняется равенство $x = x^*(t)$, откуда и будет следовать, что $x^*(t)$ есть точка минимума функции $G(x)$ на гиперплоскости (15).

Заключение, что $h(0) = 0$ очевидно из определения (19). Соотношение $h'(0) = 0$ можно получить следующим образом. Продифференцируем (19) по θ

$$h'(\theta) = \sum_{i=1}^n x_i^*(t) \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i(x(\theta), t)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*(t)), \quad (20)$$

откуда

$$h'(0) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^*(t)) \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i(x^*, t)}{\partial x_j} x_i^*(t).$$

Учитывая (15) и (17), получаем $h'(0) = 0$. Для того чтобы вычислить вторую производную функции $h(\theta)$, воспользуемся тождеством $(p(x(\theta), t), x(\theta)) = P(t)$, дифференцируя которое по θ , получим

$$\sum_{j=1}^n x_j(\theta) \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i(x(\theta), t)}{\partial x_i} (x_i - x_i^*(t)) + \sum_{i=1}^n p_i(x(\theta), t) (x_i - x_i^*(t)) = 0. \quad (21)$$

Воспользовавшись теперь (19) и (20), перепишем соотношение (21)

$$\begin{aligned} h'(\theta) + \theta \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*(t)) \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i(x(\theta), t)}{\partial x_j} (x_j - x_j^*(t)) + \\ + \sum_{i=1}^n p_i(x(\theta), t) (x_i - x_i^*(t)) = 0, \end{aligned}$$

после дифференцирования которого еще раз по θ , будем иметь

$$h''(\theta) = -2 \sum_{j=1}^n (x_j - x_j^*) \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i(x(\theta), t)}{\partial x_j} (x_i - x_i^*(t)) + \theta(\dots), \quad (22)$$

где в скобке точками обозначены несущественные для дальнейшего члены. Отсюда

$$h''(0) = -2(x - x^*(t), U(x^*, t)(x - x^*(t))).$$

Воспользовавшись леммой 1, можем заключить, что $h''(0) > 0$, если только $x \neq x^*(t)$. Поскольку вектор $x \in \pi(t)$ был выбран произвольным на гиперплоскости (15), получается, что функция $G(x)$ достигает на векторе $x^*(t)$ минимума при ограничении (15).

Следствие 1. Вектор увеличивающегося во времени выпуска оптимального продукта $x^*(t)$ есть вектор сбалансированного роста, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dx^*(t)}{dt} &= \xi(t)x^*(t), \\ \frac{dp(x^*, t)}{dt} &= (\mu - \xi(t))p(x^*, t). \end{aligned}$$

Это свойство вытекает из (6), причем из (12) и (13) следует, что $\xi(t) = \beta P(t) / (r, x(t))$, а из (15) — что цена монотонно убывает, если параметры β, μ выбраны так, что $0 < \mu\beta^{-1} < P_0 / (r, x^0)$.

Введем еще один неотрицательный вектор $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, характеризующий производство продукта, — вектор себестоимости единицы продукта — и определим его динамику системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dc_i}{dt} = E(t)k_i(t), \quad c_i(t_0) = c_i^0 \quad (23)$$

и соотношением

$$\sum_{i=1}^n c_i(t)x_i(t) = \alpha P(t), \quad (23a)$$

где α — постоянный коэффициент, $\alpha > 0, \alpha + \beta \leq 1$.

Из (23) видно, что если умножить обе его части на объем производства i -го продукта — x_i , то в левой части будет общая величина экономии от снижения себестоимости i -го продукта за период dt , а в правой — общий объем капитальных вложений, затраченный за тот же период на развитие той же отрасли, умноженный на коэффициент эффективности капитальных вложений $E(t)$, единый для всех i . Если принять коэффициент эффективности $E_i(t) = \omega_i E(t)$, где $\omega_i > 0$ — постоянная во времени, но различная по i величина, характеризующая различную для каждого продукта эффективность капитальных вложений, то, введя новый вектор $\tilde{c}_i = \omega_i^{-1} c_i$, вновь вернемся к уравнениям (23), записанным в другом масштабе себестоимости. Поэтому для упрощения дальнейшего изложения коэффициент эффективности капитальных вложений принимается одинаковым для всех продуктов.

Ограничение (23) означает, что общий объем затрат (текущих) на производство всех продуктов ограничен и составляет определенную долю (α) бюджетного ограничения (P). При этом весь объем текущих и капитальных затрат $(c, x) + (k, x)$ не превышает бюджетного ограничения, что и выражено условием $\alpha + \beta \leq 1$. При этом $\alpha + \beta < 1$ означает, что бюджетное ограничение P складывается не только из выплат потребителям за их участие в производстве продуктов, предназначенных для производственного потребления и для расширения производства, но и из других выплат, не получивших отражения в c_i и k_i : пенсии, стипендии, оплата государственного аппарата и т. д.

Продифференцировав (23), получим

$$\left(\frac{dc}{dt}, x(t) \right) + \left(c(t), \frac{dx}{dt} \right) = \alpha \mu P(t). \quad (24)$$

Это уравнение представляет собой баланс текущих затрат в момент времени t на производство всех продуктов: первый член левой части — это экономия за счет изменения себестоимости производства, второй член означает дополнительный объем текущих затрат, вызванный приростом продуктов, а в правой части уравнения есть изменение общественных ресурсов текущих затрат, не зависящее от управления капитальными вложениями. Подставляя (22) в (24), находим

$$E(t) = \alpha \mu \beta^{-1} - \left(c, \frac{dx}{dt} \right) / \beta P(t).$$

Тогда (22) можно записать

$$\frac{dc_i}{dt} = \left(\alpha \mu \beta^{-1} - \left(c, \frac{dx}{dt} \right) / \beta P(t) \right) k_i(t), \quad (25)$$

$$c_i(t_0) = c_i^0.$$

В целях определения оптимального значения вектора себестоимости введем допущение

$$c_i \frac{dx_i}{dt} = \left[\left(c, \frac{dx}{dt} \right) / \beta P(t) \right] k_i(t) x_i(t), \quad (26)$$

которое означает, что общий прирост текущих затрат, связанный с ростом объема производства всех продуктов $(c, dx/dt)$, распределяется между отдельными продуктами пропорционально капитальным вложениям, определяющим прирост объема производства этих продуктов.

Из (24) и (26) видно, что

$$\frac{dc_i x_i}{dt} = \alpha \mu \beta^{-1} k_i(t) x_i(t), \quad (27)$$

следовательно, учитывая (26), изменение текущих затрат в производстве всех продуктов (левая часть (27)) имеет место лишь в результате прироста общих ресурсов $\alpha \mu P(t)$, которые распределяются между различными продуктами пропорционально капитальным вложениям, обеспечивающим прирост объема производства и изменение себестоимости продуктов.

Таким образом, в условиях (26) и (27) никакого перемещения ресурсов текущих затрат в производстве продуктов не происходит, т. е. такое распределение ресурсов по отраслям оказывается в этом смысле оптимальным. В этом случае (более общий рассмотрен ниже) из (21) и (12) следует

$$\frac{dc_i x_i}{dt} = \alpha \mu \beta^{-1} r_i \frac{dx_i}{dt}.$$

Эти уравнения легко интегрируются, после чего находим

$$c_i(t) = \alpha \mu \beta^{-1} r_i + (c_i^0 - \alpha \mu \beta^{-1} r_i) \frac{x_i^0}{x_i(t)}, \quad (28)$$

откуда видно, что $c(t) \rightarrow \alpha \mu \beta^{-1} r$ при $x(t) \rightarrow \infty$, т. е. при неограниченном увеличении выпуска продукта $x(t)$ вектор себестоимости становится пропорциональным вектору удельных капитальных вложений. Из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. Вектор цен равновесия оптимального продукта потребления пропорционален предельной себестоимости в случае оптимального распределения ресурсов по отраслям.

Из (28) следует, что себестоимость, определяемая (27), будет снижаться при увеличении выпуска продукта $x(t)$, если

$$0 < \alpha \mu \beta^{-1} < \min_i c_i^0 / r_i, \quad (28a)$$

что можно сравнить с условием снижения цены равновесия оптимального продукта $0 < \alpha \mu \beta^{-1} < (c^0, x^0) / (r, x^0)$, полученному выше.

Учитывая, что согласно (28) при $x(t) \rightarrow \infty$ вектор себестоимости становится пропорциональным вектору удельных капитальных вложений, выражение (28) при $t \rightarrow \infty$ может быть записано в виде $0 < \alpha \mu \beta^{-1} < c_i / r_i$, заслуживающем некоторой экономической интерпретации.

Известно, что в условиях технического прогресса одной из закономерностей развития производства является снижение себестоимости при относительном росте удельных капитальных вложений, т. е. снижение отношения c_i / r_i . Отношение α / β представляет собой отношение накопления к потреблению и характеризует прирост общественных трудовых ресурсов. Следовательно, при постоянной величине μ условие (28а) может соблюдаться только в том случае, если будет постоянно снижаться отношение α / β , т. е. повышаться удельный вес затрат на развитие производства (накопление) относительно текущих затрат в производстве (потребление).

3. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ

Под оптимальной структурой производства будем понимать пару векторов $x^*(t)$ и $c^*(t)$, из которых вектор $x^*(t)$ был определен в предыдущем разделе, а $c^*(t) = \sigma(t)r$. Из (23) вытекает, что $\sigma(t) = \alpha\beta^{-1}\xi(t)$. Из системы уравнений (12) и (27) видно, что при определении вектора капитальных вложений соотношением $k^*(t) = (\alpha + \beta)p(x^*, t) - c^*(t)$ и исходя из начальных условий x_0^* и c_0^* , векторы $x(t)$ и $c(t)$, получаемые как решения соответствующих систем уравнений, будут равны $x^*(t)$ и $c^*(t)$, т. е. будут двигаться вдоль оптимальной структуры. Покажем, что выбор вектора капитальных вложений в виде

$$k(t) = (\alpha + \beta)p(x, t) - c(t) \quad (29)$$

обеспечивает также и выход на оптимальную структуру при неоптимальной начальной структуре, т. е. докажем локальную устойчивость системы (12), (29) при себестоимости, определяемой уравнениями (27).

Подставив (29) в (12), получим

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i((\alpha + \beta)p_i - c_i)x_i, \quad (30)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^n u_{ij}(x, t) a_j((\alpha + \beta)p_j - c_j)x_j + \mu p_i, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Систему уравнений (30) будем рассматривать вблизи оптимальной структуры, и поэтому $(\alpha + \beta)p(x, t) - c(t) \geq 0$ для всех $t \geq t_0$.

Представим начальные условия для (30) и (27) в виде $x^0 = x_0^* + \delta x_0$, $p_0 = p(x_0^*, t) + \delta p_0$, $c_0 = c_0^* + \delta c_0$, где векторы δx_0 и δp_0 достаточно малы. Тогда решение систем (30) и (27) можно записать в аналогичном виде

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t), \quad p(t) = p(x^*, t) + \delta p(t), \quad c(t) = c^*(t) + \delta c(t), \quad (31)$$

где $(r, \delta x(t)) = 0$, т. е. $x(t)$ и $x^*(t)$ принадлежат множеству $\pi(t)$. Выпишем системы уравнений, которым удовлетворяют вариации $\delta x(t)$ и $\delta p(t)$.

Для этого подставим (31) в правые части (30). Пренебрегая малыми второго порядка относительно δx , δp , δc , получим уравнения

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = a_i((\alpha + \beta)p_i^* - c_i^*)\delta x_i + a_i((\alpha + \beta)\delta p_i - \delta c_i)x_i^*(t), \\ i = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

Здесь $p_i^* = p_i(x^*, t)$,

$$\frac{d\delta p_i}{dt} = (\mu - \xi(t))\delta p_i + \sum_{j=1}^n u_{ij}(x^*, t) a_j((\alpha + \beta)\delta p_j - \delta c_j)x_j^*(t), \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Система уравнений (30) и (27) локально устойчива, т. е. выбор капитальных вложений в виде $k(t) = (\alpha + \beta)p(x, t) - c(t)$ обеспечивает локальную сходимость процесса, определяемого системой (30) и (27) к оптимальной структуре.

Теорему докажем прямым методом Ляпунова. Для этого рассмотрим функцию $V(x) = (p(x, t) - p(x^*, t), x^*)$ при условии $(r, x - x^*(t)) = 0$, где $x^* = x^*(t) / (r, x^*(t))$, x^* — постоянный вектор, не зависящий от времени.

Как следует из теоремы 1, $V(x) > 0$, если только $x \neq x^*(t)$. Поэтому, чтобы доказать устойчивость, надо показать, что вдоль траектории $x(t)$, определяемой системой уравнений (30), $dV/dt < 0$. Подставляя (32) в $dV/dt = (d\delta p/dt, x^*)$ и используя соотношения (11), получим $dV/dt = (\mu - \zeta(t))V(t) - (1 + \alpha\beta^{-1})\zeta(t)V(t) + O(\|\delta c(t)\|)$.

Воспользовавшись тем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \mu$ и для системы уравнений (27) $\delta c(t) \rightarrow 0$, приходим к выводу, что для достаточно больших t вдоль определенной выше траектории $dV/dt < 0$. Теорема доказана.

Следовательно, если мы находимся вблизи оптимальной структуры производства, то, выбирая капитальные вложения так, чтобы полные затраты были пропорциональны ценам равновесия того же периода времени, мы достигнем сходимости производства потребительского продукта к оптимальной структуре и дальнейшего движения вдоль нее.

Вернемся теперь к уравнениям (25), выражающим эволюцию себестоимости в зависимости от капитальных вложений в случае перераспределения ресурсов в отраслях. В этом случае уже нельзя сказать, что при любом $x(t) \rightarrow \infty$ будет иметь место сходимость $c(t) \rightarrow c^*(t)$, или, что то же самое, $\delta c(t) \rightarrow 0$. Но и в этом случае можно показать оптимальность управления (29).

Теорема 3. Система уравнений (30) и (25) локально устойчива в окрестности оптимальной структуры, т. е. управление капитальными вложениями $k(t) = (\alpha + \beta)p(x, t) - c(t)$ является оптимальным.

Проварьировав уравнения (25) в окрестности оптимальной структуры, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\delta c_i}{dt} &= \alpha\beta^{-1}(\mu - \zeta(t))\delta k_i - \\ &- \frac{1}{\beta P(t)} \sum_{j=1}^n [a_j \delta c_j \beta p_j^* x_j^*(t) + a_j c_j^* \delta k_j x_j^*(t) + a_j c_j^* k_j^* \delta x_j] k_i^*. \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая теперь, что $k^*(t) = \zeta(t)r$, $c^*(t) = \alpha\beta^{-1}\zeta(t)r$, $p^*(t) = \beta^{-1}\zeta(t)r$ и $(r, \delta x(t)) = 0$, уравнения (33) можно записать в виде

$$\frac{d\delta c_i}{dt} = \alpha\beta^{-1}(\mu - \zeta(t))\delta k_i - \frac{1}{\beta P(t)} [\zeta(t)(\delta c, x^*) + \alpha\beta^{-1}\zeta(t)(\delta k, x^*)] k_i^*. \quad (34)$$

Умножая обе части (34) скалярно на вектор $x^* = x^*(t) / (r, x^*(t))$, получим

$$\frac{d}{dt}(\delta c, x^*) = \alpha\beta^{-1}(\mu - \zeta(t))(\delta k, x^*) - \zeta(t)(\delta c, x^*) - \alpha\beta^{-1}\zeta(t)(\delta k, x^*) \quad (35)$$

или

$$\begin{aligned} d/dt(\delta c, x^*) &= \alpha\beta^{-1}(\mu - 2\zeta(t))(\alpha + \beta)(\delta p, x^*) + \\ &+ (2\alpha\beta^{-1}\zeta(t) - \zeta(t) - \alpha\beta^{-1}\mu)(\delta c, x^*). \end{aligned} \quad (36)$$

Составим из (35) и (33) систему

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta p, x^*)}{dt} &= (\mu - 2\zeta(t) - \alpha\beta^{-1}\zeta(t))(\delta p, x^*) + \beta^{-1}\zeta(t)(\delta c, x^*), \\ \frac{d(\delta c, x^*)}{dt} &= \alpha\beta^{-1}(\mu - 2\zeta(t))(\alpha + \beta)(\delta p, x^*) - (\zeta(t) + \alpha\beta^{-1}\mu - \\ &\quad - 2\alpha\beta^{-1}\zeta(t))(\delta c, x^*). \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя значение $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta(t) = \mu$, $t \rightarrow \infty$ в (37), для достаточно больших t получим систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta p, x^*)}{dt} &= -\mu(1 + \alpha\beta^{-1})(\delta p, x^*) + \beta\mu^{-1}(\delta c, x^*), \\ \frac{d(\delta c, x^*)}{dt} &= -\alpha\mu(1 + \alpha\beta^{-1})(\delta p, x^*) + \mu(\alpha\beta^{-1} - 1)(\delta c, x^*), \end{aligned} \quad (38)$$

устойчивость нулевого решения которой проверяется с помощью критерия Гурвица [6].

Введем вектор $y = (y_1, y_2)$, где $y_1 = (\delta p, x^*)$, а $y_2 = (\delta c, x^*)$. Тогда (38) можно представить в матричной форме

$$\frac{dy^r}{dt} = Ay^r, \quad (39)$$

где матрица A равна

$$A = \begin{vmatrix} -\mu(1 + \alpha\beta^{-1}) & -\mu\alpha(1 + \alpha\beta^{-1}) \\ \mu\beta^{-1} & \mu(\alpha\beta^{-1} - 1) \end{vmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu^2(1 + \alpha\beta^{-1}) = 0. \quad (40)$$

Поскольку коэффициенты уравнения (40) положительны, то система (39) устойчива [7].

Теперь можно легко доказать локальную устойчивость системы уравнений (25) и (30) в окрестности оптимальной структуры. Действительно, ввиду (40) при начальных условиях этих уравнений, близких к оптимальной структуре, будут иметь место сходимости

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\delta p(t), x^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\delta c(t), x^*) = 0. \quad (41)$$

С другой стороны, теоремой 2 доказано, что $\delta p(t), x^* > 0$, если только $x(t) \neq x^*(t)$, следовательно, из (41) и предположений непрерывности вытекает, что $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*(t)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p^*(t)$.

Далее, из (29) и следствия 1 вытекает, что если $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*(t)$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k^*(t)$.

В нашем случае $k(t) = (\alpha + \beta)p(t) - c(t)$, т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = (\alpha + \beta) \lim_{t \rightarrow \infty} x \times p(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = \alpha\mu\beta^{-1}r$.

Таким образом, теорема доказана.

Следствие 3. При оптимальном управлении капиталными вложениями цены равновесия, капиталные вложения на единицу прироста, ка-

питательные вложения на единицу выпускаемой продукции и себестоимость в пределе становятся пропорциональными.

Из доказанной теоремы следует, что для оптимизации структуры потребительского продукта достаточно:

во-первых, устанавливать розничные цены как можно ближе к ценам равновесия, информацию о которых можно получить как на основе математических методов формализации процессов их образования и обработки статистических данных, так и путем непосредственного взвешивания спроса и предложения в практике реализации предметов личного потребления;

во-вторых, иметь информацию о текущих и капитальных затратах, приходящихся на единицу продукции, учитывая, что в чистом виде, без «прибавочного продукта», себестоимость продукции — это денежные выражения полных затрат труда на производство продукции [7, гл. II, III], а капитальные затраты — это себестоимость продукции, обеспечивающей развитие производства (рост объема и снижение текущих затрат на единицу), следует оптовую цену продукции (без налога с оборота) формировать как сумму текущих и капитальных затрат отрасли на производство и развитие производства отраслевой продукции;

в-третьих, распределять общие ресурсы капитальных вложений по отраслям так, чтобы отношение оптовой цены к розничной было по всем продуктам одинаковым. Такое распределение влечет за собой развитие производства в направлении выхода потребительского продукта на оптимальную структуру в смысле максимального удовлетворения потребителя при данных ресурсах текущих и капитальных затрат, хотя информации об этой структуре и нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. J. Arrow, L. Hurwicz. On the Stability of Competitive Equilibrium. I. *Econometrica*, 1958, N 26.
2. K. J. Arrow, H. D. Block, L. Hurwicz. On the Stability of Competitive Equilibrium, II. *Econometrica*, 1959, N 27.
3. С. Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., «Мир», 1964.
4. В. Л. Макаров, А. Н. Рубинов. Магистраль в моделях экономики. В сб. Первая конференция по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством. Тезисы докладов. 1-я секция, Методологические проблемы разработки систем оптимального планирования и управления народным хозяйством. М., 1971. (АН СССР. Научн. совет по комплексной проблеме «Оптимальные планирования и управление нар. хоз-вом». ЦЭМИ).
5. Н. И. Ведута. Экономическая кибернетика. Минск, «Наука и техника», 1971.
6. Н. И. Ведута. Экономическая эффективность новой техники. Минск, «Наука и техника», 1964.
7. Р. Беллман. Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969.

Поступила в редакцию
13 I 1972