

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВРЕМЕННОГО ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Ф. Б. БАРЕНБАУМ, С. Ш. РОЗЕНБОЙМ

(Москва, Луганск)

Рассматриваемая задача относится к числу актуальных задач по оптимальному использованию имеющихся ресурсов. Эти задачи приобретают важное значение в условиях функционирования сложной динамической системы строительного производства, одной из основных особенностей которой является детерминированное изменение состояния в дискретные моменты времени, связанные с началом и окончанием работ на строящихся объектах. Время ввода объектов в эксплуатацию увязано в народнохозяйственных планах, а продолжительность строительства является заданной (нормативной или директивной) величиной. Это предопределяет необходимость временного распределения ресурсов, предусматривающего их перераспределение в заранее намеченные моменты времени. Данное условие делает во многих случаях затруднительным непосредственное применение методов линейного программирования и требует учета специфики задачи. Один из возможных путей решения и приводится ниже на примере распределения машинного парка общестроительной организации.

В самом общем виде сущность работы строительных машин заключается в поочередном обслуживании заказов на производство отдельных видов строительно-монтажных работ на возводимых объектах. Сроки возникновения заказов являются заранее заданными величинами, определяемыми календарным графиком. Машинный парк строительной организации состоит из разнотипных машин. Машины каждого типа имеют определенную область возможного применения, которая зависит от их технической характеристики и определяет способность обслужить строительно-монтажные работы на различных объектах, отличающихся разнообразными объемно-конструктивными и технологическими параметрами. Области применения разнотипных машин, как правило, пересекаются, чем и обусловлена их взаимозаменяемость. Машины через определенные периоды времени становятся на ремонт, продолжительность которого зависит в основном от типа машины и вида ремонта. Все данные о ремонтах определяются графиком планово-предупредительных мероприятий. Объекты строительства рассредоточены на значительной площади, что обуславливает необходимость периодической перебазировки машин с объекта на объект. Такая перебазировка включает в себя демонтаж, перевозку и монтаж и зависит главным образом от типа машины и в значительно меньшей степени от расстояния между объектами. Каждый объект обслуживается одной или (реже) несколькими машинами, которые в это время нигде больше использоваться не могут. Стоимость обслуживания зависит от типа машины и параметров объекта.

Показателем эффективной работы машинного парка является минимальный размер затрат, связанных с обслуживанием машинным парком

всех возводимых объектов в рассматриваемый период времени. Таким периодом при решении задач оперативного планирования наиболее целесообразно выбирать календарный год.

Введем следующие обозначения: m — количество имеющихся машин; n — количество обслуживаемых строительных объектов; $t_j^H, t_j^K, j = 1, \dots, n$ — соответственно моменты начала и конца производства механизированных работ на j -м объекте; $t_j = (t_j^H, t_j^K), j = 1, \dots, n$; $\tau_i, i = 1, \dots, m$ — продолжительность перебазировки i -й машины из расчета среднего расстояния между объектами; $t_{ij}^H, t_{ij}^K, i = 1, \dots, m; j = n+1, \dots, p$ — соответственно начало и конец j -го ремонта i -й машины, причем для единообразия обозначений счет ремонтов удобно начинать с $n+1$;

$$t_{ij} = \begin{cases} (t_j^H, t_j^K + \tau_i), & \text{если } i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, \\ (t_{ij}^H, t_{ij}^K + \tau_i), & \text{если } i = 1, \dots, m; j = n+1, \dots, p; \end{cases}$$

$q_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ — производительность i -й машины на j -м объекте; $Q_j, j = 1, \dots, n$ — объем работ на j -м объекте; $c_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ — приведенные затраты при производстве работ i -й машины на j -м объекте.

Будем считать, что $c_{i_0 j_0}$ равно достаточно большому числу, обозначенному далее ∞ , если i_0 -я машина не может обслуживать j_0 -й объект из-за несоответствия ее параметров или ввиду имеющего место неравенства $q_{i_0 j_0}(t_{i_0}^K - t_{i_0}^H) < Q_{j_0}$. Чтобы сделать невозможным использование i_0 -й машины, находящейся на k -м ремонте, $k \in \{n+1, \dots, p\}$ на каком-нибудь j -м объекте, $j \in \{1, \dots, n\}$, примем $c_{i_0 j} = \infty$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $t_{i_0 j} \cap t_{i_0 k} \neq \emptyset$ хотя бы при одном из значений $k \in \{n+1, \dots, p\}$.

Примем

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я машина используется на } j\text{-м объекте,} \\ 0, & \text{если } i\text{-я машина не используется на } j\text{-м объекте,} \end{cases}$$

тогда рассматриваемая задача может быть формализована следующим образом: минимизировать

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$x_{ij} + x_{ik} \leq 1, \forall i, k (j, k \in \{1, \dots, n\}, j \neq k, t_{ij} \cap t_{ik} \neq \emptyset), \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, m,$$

$$x_{ij} > 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$x_{ij} - \text{целое}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

В [1] уже рассматривалась задача по оптимальному распределению парка строительных машин, однако там вопрос решался применительно к условиям строительства линейно-протяженных объектов (в частности, дорожного строительства), для которых временные ограничения практически не имеют значения и в работе не учитывались. Поставленная выше задача отражает работу машин в общестроительных организациях.

Получившуюся задачу линейного целочисленного программирования с большим числом ограничений будем решать методом ветвей и границ [2].

Опишем правила получения границ и выбора переменной x_{ij} для ветвления (фиксирования). Для определения нижней границы целевой функции задачи (1)–(5) найдем $c_j = \min_i c_{ij}$ и $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - c_i$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

Тогда

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{c}_{ij} + c_j) x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n c_j.$$

Так как все $\bar{c}_{ij} \geq 0$, то $\sum_{j=1}^n c_j'$ является нижней границей целевой функции задачи (1)–(5) и задача минимизации

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{c}_{ij} x_{ij} \quad (6)$$

при ограничениях (2)–(5) эквивалентна задаче (1)–(5).

Пусть $\bar{c}_{i_1 j_1} = 0$. Тогда, если принять $x_{i_1 j_1} = 1$, то из (3) следует, что $x_{i_1 k} = 0 \quad \forall k (k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1\}, t_{i_1 j_1} \cap t_{i_1 k} = \emptyset)$. Если коэффициентам $\bar{c}_{i_1 k} := \infty \quad \forall k (k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1\}, t_{i_1 j_1} \cup t_{i_1 k} \neq \emptyset)$ и опустить в целевой функции (6) члены $\bar{c}_{i_1 j_1} x_{i_1 j_1}$, $i = 1, \dots, m$, то из (2)–(6) получим новую задачу, решив которую можно определить значения еще не фиксированных переменных. Эта задача такого же вида, что и (1)–(5), но меньшей размерности. Обозначим коэффициенты целевой функции этой задачи c'_{ij} и найдем $c'_j = \min_i c'_{ij}$, $j \neq j_1$. Нижняя граница целевой функции задачи

$$(1)–(5) \text{ при } x_{i_1 j_1} = 1 \text{ может быть увеличена на } \sum_{j \neq j_1} c'_j.$$

Если принять $x_{i_1 j_1} = 0$, то, присвоив $\bar{c}_{i_1 j_1}$ значение ∞ , получим из (2)–(6) новую задачу, решив которую можно определить значения еще не фиксированных переменных. Эта задача того же вида, что и (1)–(5). Нижняя граница целевой функции задачи (1)–(5) при $x_{i_1 j_1} = 0$ может быть получена из границы целевой функции (1)–(5) увеличением на $\theta = \min_{i \in I_1} c_{ij}$, где $I_1 = \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1\}$.

Обозначим через $i(j)$ одно из тех значений i , при котором для каждого данного $j \in \{1, \dots, n\}$ имеет место равенство $c_{i(j)j} = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} c_{ij}$, $j = 1, \dots, n$.

Тогда, если еще не фиксированной переменной $x_{i(j)j}$ придать значение, равное нулю, то нижняя граница целевой функции (1)–(5) при $x_{i(j)j} = 0$ возрастает на $\theta_j = \min_{i \in I_2} c_{ij} - c_{i(j)j}$, где $I_2 = \{1, \dots, m\} \setminus \{i(j)\}$, $j = 1, \dots, n$.

Чтобы сделать это возрастание наибольшим, будем выбирать для ветвления такую переменную $x_{i_1 j_1}$, чтобы

$$\min_{i \in I_1} c_{ij_1} - c_{i_1 j_1} = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} (\min_{i \in I_2} c_{ij} - c_{i(j)j}).$$

Дальнейшие вычисления границ и выбор фиксированной переменной производятся аналогично. Ниже описывается алгоритм ветвей и границ, в котором использованы приведенные выше правила ветвлений и вычислений границ. Для реализации алгоритма принята экономно использующая память схема, при которой ветвлению, пока возможно, подвергается одна из вершин дерева ветвлений, полученных на предыдущем шаге алгоритма.

В описании алгоритма z^* — значение целевой функции на лучшем из известных допустимых планов; q — номер очередной фиксированной пере-

менной; w — нижняя граница для рассматриваемой вершины; $\bar{w}(q)$ — нижняя граница, получаемая при фиксировании $x_{i_q i_q} = 0$.

Предварительный шаг. 1) $z^* := \infty$, $w := 0$, $q := 1$, $I := \{1, \dots, m\}$, $J := \{1, \dots, n\}$. В качестве $\|c_{ij}\|$ принять матрицу коэффициентов целевой функции (1).

Общий шаг. 2) Определить $c_j = \min_{i \in I} c_{ij} = c_{i(j)j}$, $j \in J$;

$$c'_j = \min_{i \in I \setminus \{i(j)\}} c_{ij}, j \in J; \quad \bar{c}_{ij} = c_{ij} - c_j, i \in I, j \in J;$$

$$\bar{c}_j := c'_j - c_j, j \in J; \quad 0 := \max_{j \in J} \bar{c}_j = \bar{c}_{j_q}; \quad i_q := i(j_q);$$

$$w := w + \sum_{j \in J} c_j.$$

3) Если $w \geq z^*$, идти к 13.

4) $x_{i_q j_q} := 1$; $\bar{w}(q) := w + \theta$.

5) $q := q + 1$; $J := J \setminus \{j_q\}$.

6) Если $J = \emptyset$, идти к 9.

7)

$$c_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{при } (i, j) = (i_q, k) \nexists_k (k \in J, t_{i_q i_q} \cap t_{i_q k} \neq \emptyset), \\ \bar{c}_{ij} & \text{при остальных значениях } (i, j), i \in I, j \in J. \end{cases}$$

Идти к 2.

8) $z^* := w$; образовать $P = \{(i_s, j_s) : s \in \{1, \dots, q-1\}, x_{i_s j_s} = 1\}$.

9) Если $\bar{w}(q-1) \geq z^*$, идти к 12.

10) $x_{i_{q-1} j_{q-1}} := 0$; $w := \bar{w}(q-1)$; $\bar{w}(q-1) := \infty$;

$$J' := \{j_s : j_s \in \{1, \dots, n\}, s \in \{1, \dots, q-1\}, x_{i_s j_s} = 1\}; J := J \setminus J'.$$

11)

$$c_{ij} := \begin{cases} \infty & \text{при } (i, j) = (i_s, j_s) \nexists_s (s \in \{1, \dots, q-1\}, j_s \in J, x_{i_s j_s} = 0), \\ \infty & \text{при } (i, j) = (i_s, j) \nexists_s (s \in \{1, \dots, q-1\}, j_s \in J, x_{i_s j_s} = 1, t_{i_s j_s} \cap t_{i_s j} \neq \emptyset), \\ c_{ij} & \text{при остальных значениях } (i, j), i \in I; j \in J. \end{cases}$$

Идти к 2.

12) $q := q - 1$.

13) Если $q > 1$, идти к 9.

14) Ответ: z^* ; $x_{ij} = 1$ при $(i, j) \in P$; $x_{ij} = 0$ при $(i, j) \notin P$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

По описанному алгоритму составлена программа для ЭВМ «Урал-2», позволяющая решать задачи, включающие до 75 возводимых объектов и до 50 строительных машин одного назначения, что практически обеспечивает потребности большинства общестроительных трестов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Я. Луцкий. Об одной задаче распределения парка строительных машин при поточной организации строительства. Экономика и матем. методы, 1967, т. III, вып. 6.
2. Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрл. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 1.

Поступила в редакцию
7 X 1969