9. Проблемы регрессионного анализа и экономического прогнозирования. Материалы конференции. Рига, 1970 (ЦСУ Латв.ССР).
10. Б. Н. Михалевский. Макроэкономический прогноз технологического прогресса и структуры экономического роста. Экономика и матем. методы, 1971, т. VII, вып. 4.

Поступила в редакцию
19 IV 1972

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ МЕЖДУ ПРОГРАММАМИ РАЗВИТИЯ БОЛЬШИХ СИСТЕМ

Д. В. БАКУРАДЗЕ, А. П. КОЗЛОВЦЕВ, А. А. МАЛЫШЕВ
В. И. ЧЕРНЕЦКИЙ

(Москва, Ленинград)

В [1—4] и других работах рассматривается лишь прямая задача распределения, т. е. задача минимизации ресурсов за весь период планирования при заданной эффективности. Однако практически интересна и обратная задача, когда расход ресурсов на весь период строго задан. В данной статье исследуется большая система, программа развития которой включает ряд частных программ.

Пусть процесс развития большой системы разбивается на k периодов, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, K$. Считается, что с точки зрения внешней системы определены:

1) множество программ развития большой системы с номерами $i = 1, 2, 3, \ldots, m$;

2) степень достижения цели всей системы, которая выражается расположенными в определенном порядке величинами

$$b_{ik}^{+} \quad \text{и} \quad b_{ik}^{-}, \tag{1}$$

являющимися соответственно верхним желаемым и минимально необходимым нижним уровнями выполнения программы в периоде k. Предполагается, что этот порядок задается коэффициентами важности μ_{ik};

3) множество средств N_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, с помощью которых эти программы могут быть выполнены;

4) матрица состояний средств $\|\gamma_{ijks}\|$, характеризующая возможность применения j-го средства для выполнения i-й программы в периоде k. Номер состояния $s = 1, 2, \ldots, S$,

$$\sum_{s-1}^{S} \gamma_{ijks} = 1. \tag{2}$$

При этом средство j, находившееся в периоде $k-1$ состояния S, может в периоде k либо остаться в этом же состоянии, либо перейти в следующее $S+1$, т. е.

$$\gamma_{ijks} = \gamma_{ij(k-1)s}, \qquad \text{если} \quad \gamma_{ijks} = 1, \tag{3}$$

или

$$\gamma_{ijk(s+1)} = \gamma_{ij(k-1)s}, \qquad \text{если} \quad \gamma_{ijk(s+1)} = 1.$$

Рассматриваются только три состояния средств, т. е. $S = 3$, а функция γ_{ijks} принимает следующие значения: $\gamma_{ijk1} = 1$, $\gamma_{ijk2} = \gamma_{ijk3} = 0$, если поисковые работы по применению j-го средства для i-й программы не окончены; $\gamma_{ijk2} = 1$, $\gamma_{ijk1} = \gamma_{ijk3} = 0$ — если поисковые работы окончены и можно начинать опытно-конструкторские работы (ОКР); $\gamma_{ijks} = 1$, $\gamma_{ijk1} = \gamma_{ijk2} = 0$ — если ОКР окончены и можно начинать (ведется) производство; $\gamma_{ijks} \equiv 0$ — если применение j-го средства по i-й программе в принципе невозможно.

Значения функции γ_{ijks} можно определить из соотношения

$$\gamma_{ijks} = \begin{cases} 1, \text{ если } U_{ijk\,(s-1)} \leqslant \sum\limits_{g=0}^{k-1} \sum\limits_{q=1}^{s} \gamma_{ijgq} x_{ijKg} < U_{ijK}, \\ 0 \text{ — в противном случае, где } U_{ijK0} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

U_{ijk3} — достаточно большое число. Выражение (4) фактически отражает длительность инвестиционного периода и определяет динамику развития в сфере научных исследований.

Предположим, что к началу периода k все средства, необходимые для выполнения программы в этом периоде, произведены. Обозначим число средств j-го типа, которые нужно произвести в периоде k для выполнения i-й программы в периоде $k+1$, через y_{ijk}, число средств j-го типа, функционирующих в периоде k по i-й программе — через $\bar{y}_{ijk}$, причем

$$\bar{y}_{ijk} = y_{ij(k-1)} + \sum_{g=0}^{k-1} y_{ijgk}\beta_{ijkg}, \tag{5}$$

где

$$y_{ij(k-1)} = \frac{1}{z_{ijk}} \gamma_{ij(k-1)3} x_{ijk}. \tag{6}$$

Здесь z_{ijk} — известная стоимость производства единицы средства j по i-й программе в период k. При расчетах необходимо учитывать следующие ограничения:

1) по капиталовложениям в научные исследования для каждого периода, которые определяются возможностями научно-исследовательских учреждений

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ijks} x_{ijk} \leqslant C_{ks}, \qquad s = 1, 2; \tag{7}$$

2) по возможностям производства по выпуску средств j-го типа

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ijk} \leqslant \lambda_{jk}. \tag{8}$$

Каждое средство характеризуется некоторым сроком жизни. Этот срок определяет число периодов планирования, в течение которых средство может выполнить программу. Возможность использования средства, произведенного в предшествующих периодах, задается матрицей $\|\beta_{ijkg}\|$, где

$$\beta_{ijkg} = \begin{cases} 1, \text{ если средство } j, \text{ произведенное по программе } i \\ \text{в период } g, \text{ можно использовать в период } k. \\ 0, \text{ если средство } j, \text{ произведенное по программе } i \\ \text{в период } g, \text{ нельзя использовать в период } k. \end{cases}$$

При разработке плана развития программ задается допустимый расход ресурсов $C_k^{д}$ в каждом периоде на развитие всех программ. Таким образом, общие расходы ресурсов в научных исследованиях, производстве и эксплуатации не должны превышать допустимые, т. е.

$$\begin{gathered} C_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ijk} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_{ij(k-1)} C_{ijk}^{э} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{g=0}^{k-2} y_{ijkg}\beta_{ijkg} C_{ijkg}^{э} \leqslant C_k^{д}, \end{gathered} \tag{9}$$

где $C_{ijk}^{э}$ — расходы ресурса на эксплуатацию средства j по программе i в период k; $C_{ijkg}^{э}$ — расходы на эксплуатацию средства j, произведенного в периоде g, по программе i в период k. Функция F_{ik}, оценивающая уровень выполнения программы i в периоде k в зависимости от числа $\bar{y}_{ijk}$ средств, выполняющих эту программу, может быть описана зависимостью, которая считается известной

$$\left. \begin{aligned} & F_{ik} = F_{ik}(\bar{y}_{ijk}) \\ & i = 1,2, \ldots, m \\ & j = 1,2, \ldots, n \\ & k = 1,2, \ldots, K \end{aligned} \right\}. \tag{10}$$

Предполагая, что функцию F_{ik} можно линеаризовать, получим линейную форму

$$F_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\bar{y}_{ijk}, \tag{11}$$

где a_{ijk} — эффективность выполнения программы i средством j в периоде k.

В соответствии с (1) должно выполняться основное ограничение

$$b_{ik}^{-} \leqslant F_{ik} \leqslant b_{ik}^{+}. \tag{12}$$

Для рассматриваемой задачи, когда ресурсы строго заданы, в качестве оценки оптимальности плана можно использовать следующий критерий: минимальная степень выполнения всех важных программ должна быть наибольшей при условии обеспечения нижнего уровня по остальным программам. Этот критерий наиболее близок к наилучшему приближению всех важных программ к желаемым уровням развития. Исходя из этого, сформулируем задачу: для системы, состояние которой в период k устанавливается неравенствами (4), а число функционирующих средств определяется из (5), (6), необходимо найти такие матрицы $\|x_{ij}\|_k$, чтобы максимизировать степень выполнения программы, степень которой — минимальная среди всех важных программ, т. е.

$$\max_{\|x_{ij}\|_k} \min_{i,k} \mu_{ik} \frac{F_{ik} - b_{ik}^{-}}{b_{ik}^{+} - b_{ik}^{-}}, \tag{13}$$

где

$$\mu_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ — для важных в периоде } k \text{ программ,} \\ 0 \text{ — для остальных программ при условии} \\ (12) \text{ и ограничениях } (7) \text{ — } (9). \end{cases}$$

Искомое распределение ресурсов по программам определяется как

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} + \sum_{j=1}^{n} y_{ij(k-1)}C^{э}_{ijk} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{g=0}^{k-2} y_{ijg}\beta_{ijkg}C^{э}_{ijkg}. \tag{14}$$

Сформулированную задачу можно интерпретировать как задачу наилучшего приближения к программной траектории. Действительно, программная траектория считается заданной в виде набора уровней выполнения программы i в периоде K, т. е. b_{ik}^{+} и b_{ik}^{-}, а критерием качества управления выступает требование, чтобы максимальное отклонение уровня выполнения программы от b_{ik}^{+} среди всех i по всем периодам k было минимальным для всех важных программ, а для остальных не менее b_{ik}^{-} при заданных ограничениях.

Рассмотрим методы решения этой задачи. Покажем, что ее можно свести к простой задаче минимизации. Прежде всего заменим max min на min max

$$\max_{\|x_{ij}\|_k} \min_{i,k} \mu_{ik} \frac{F_{ik} - b_{ik}^{-}}{b_{ik}^{+} - b_{ik}^{-}} = \min_{\|x_{ij}\|_k} \max_{i,k} \mu_{ik} \frac{-(F_{ik} - b_{ik}^{-})}{b_{ik}^{+} - b_{ik}^{-}}. \tag{15}$$

Введем переменную V, которая должна удовлетворять ограничениям

$$V \geqslant -\frac{F_{ik} - b_{ik}^{-}}{b_{ik}^{+} - b_{ik}^{-}} \mu_{ik} = v, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{16}$$

и форму $G = V$. Очевидно, минимальное значение формы G всегда равно $\max v_{ik}$. Следовательно, задача (13) эквивалентна минимизации $G = V$, т. е. необходимо найти $\min\limits_{\|x_{ij}\|_k} G$ при ограничениях (7) — (9), (12) и дополнениях (16).

Введем добавочные переменные U^{+}_{ijk}, U^{-}_{ijk}, U_k, U_{ks}, U_{ik} и перейдем от системы неравенств к системе равенств. Тогда неравенства (12) запишутся в следующем виде: $F_{ik} - b_{ik}^{+} = U_{ik}^{+}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $F_{ik} - b_{ik}^{-} = U_{ik}^{-}$, $k = 1, 2, \ldots, K$; условие (9),

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_{ij(k-1)}C^{э}_{ijk} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{g=0}^{k-2} y_{ijgk}\beta_{ijkg}C^{э}_{ijkg} - C_k = U_k;$$

условие (7)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ijk}\gamma_{ijks} - C_{ks} = U_{ks}, \qquad s = 1, 2, \ldots, S;$$

условие (8)

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ijk} - \lambda_{ijk} = U_{k1};$$

условие (16): $V + \mu_{ik}\dfrac{F_{ik} - b_{ik}^-}{b_{ik}^+ - b_{ik}^-} = U_{ki}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad k = 1, \ldots, K.$

В качестве формы G можно выбрать любое из последних уравнений, например $G = V = U_{11} - \mu_{11}\dfrac{F_{11} - b_{11}^-}{b_{11}^+ - b_{11}^-}$ при $\mu_{11} = 1$. Сформулированная задача минимизации G относится к классу задач динамического программирования при дискретном времени и сведена к задаче линейного программирования, которая может быть решена известными методами [3—6]. Ввиду большой размерности задачи и характера ограничений возможно применение методов декомпозиции. Поскольку, как, правило, средства определенного типа можно применять только в одной определенной программе, матрица ограничений легко приводится к блочно-диагональному виду или во всяком случае к матрице с большим числом нулевых элементов, что облегчает применение декомпозиции. В качестве приближенного метода решения, основывающегося на декомпозиции и методе последовательных уступок [7], можно предложить следующий:

1) для каждой i-й программы рассчитывается наиболее оптимальная программа развития, т. е. решается задача минимизации C_{ik} по (14) при условии $F_{ik} = b_{ki}^+$ — для важных программ, $F_{ik} = b_{ik}^-$ — для остальных;

2) проверяется условие (9);

3) если условие выполняется, то задача решена;

4) если условие не выполняется, то все $C_{ik}^{(1)}$ по $C_{ik}^{(2)}$ уменьшаются пропорционально $C_{ik}^{(1)}$, т. е. из условия

а) $\ldots = \dfrac{C_{ik}^{(2)}}{C_{ik}^{(1)}} = \dfrac{C_{i+1,\,k}^{(2)}}{C_{i+1,\,k}^{(1)}} = \ldots,$

б) $\sum\limits_{i=1}^{m} C_{ik}^{(2)} = C_k^{\text{д}};$

5) определяются $P_{ik} = \dfrac{F(C_{ik}^{(2)})}{b_{ik}^+}$. При этом распределение ресурсов принимается пропорциональным $C_{ik}^{(1)}$;

6) все i располагаются в порядке уменьшения P_{ik} и находится среднее по i значение P_k;

7) со всех i, у которых $P_{ik} > P_k$ снимаем ΔC_{ik}, чтобы сделать $P_{ik} = P_k$, и распределяем полученную сумму ΔC_{ik} пропорционально C_{ik} / P_{ik} среди i, для которых $P_{ik} < P_k$;

8) если полученное после этого значение $C_k^{(2)} \leqslant C_k^{\text{д}}$, то задача решена.

В противном случае повторяем действия, начиная с п. 5 для $C_{ik}^{(3)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Д. Анисимов-Спиридонов. Методы и модели больших систем оптимального планирования и управления. М., «Наука», 1969.
2. Л. С. Гурин, Я. С. Дымарский, А. Д. Меркулов. Задачи оптимального распределения ресурсов. М., «Сов. радио», 1968.
3. О. Ланге. Оптимальные решения. М., «Прогресс», 1967.
4. Р. Арис. Дискретное динамическое программирование. М., «Мир», 1969.

5. Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. Новые направления в линейном программировании. М., «Сов. радио», 1966.
6. Ф. И. Карпелевич, Л. Е. Садовский. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М., Физматгиз, 1963.
7. Е. С. Вентцель. Введение в исследование операций. М., «Сов. радио», 1964.

Поступила в редакцию
28 V 1971

О МИНИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ФАКТОРОВ В МОДЕЛИ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

М. А. БУТИНА

(Москва)

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — случайные, нормально распределенные величины. На протяжении всей работы будем считать их приведенными (т. е. центрированными и нормированными). Пусть

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \ldots r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \ldots r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots 1 \end{pmatrix}$$

— матрица их взаимных корреляций ($r_{ij} = r_{ji}$ — коэффициент корреляции случайных величин z_i и z_j).

Задача факторного анализа: зная R, найти представление случайных величин $z_1, \ldots, z_n$ в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{11}F_1 + \ldots + a_{1l}F_l + b_1U_1, \\ z_2 &= a_{21}F_1 + \ldots + a_{2l}F_l + b_2U_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= a_{n1}F_1 + \ldots + a_{nl}F_l + b_nU_n, \end{aligned} \tag{1}$$

где $F_1, F_2, \ldots, F_l, U_1, U_2, \ldots, U_n$ — центрированные, нормированные и взаимно независимые нормально распределенные случайные величины; a_{ij} и b_i, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, l$ — действительные числа; $F_1, \ldots, F_l$ — общие факторы; $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — индивидуальные.

Модель (1) факторного анализа давно используется в психологии и в последнее время все большее применение находит в экономике (см., например, [1, стр. 7]).

Очевидно, модель (1) тем проще, чем меньше l, поэтому естественно строить ее при минимальном возможном l.

Минимальное количество общих факторов, как легко видеть, не определяется числом n случайных величин, а зависит для данного n от вида корреляционной матрицы R (например, если $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, то при любом n в (1) можно обойтись одним общим фактором, а если $z_1, \ldots, z_n$ взаимно независимы, то не нужно ни одного). Имея это в виду, естественно поставить такой вопрос: каким минимальным количеством m общих факторов можно обойтись наверняка, строя модель (1) для n случайных величин с произвольной корреляционной матрицей. Этот вопрос — один из важнейших в факторном анализе. Он рассматривается, в частности, в [1], где утверждается, что m равно минимальному целому числу, большему $\dfrac{(2n+1) - \sqrt{8n+1}}{2}$, т. е. при $n = 2$ $m = 1$, $n = 3$ $m = 1$ и т. д. [1 стр. 70] и, следовательно, при $n > 2$, $m < n - 1$. Это, однако, неверно. В настоящей работе доказывается, что $m = n - 1$, и объясняется ошибка, допущенная в [1].

Сначала покажем, что $n - 1$ общего фактора достаточно (теорема 1), потом, что существуют наборы случайных величин $z_1, \ldots, z_n$, для которых (1) может быть построена не меньше, чем с $n - 1$ общим фактором (теорема 2).

Теорема 1. *Для любого набора $z_1, \ldots, z_n$ из n случайных величин можно построить модель (1) с не более чем $n - 1$ общим фактором.*