

ФРАНСУА ВИЕТ И СТАНОВЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ НОВОГО ВРЕМЕНИ

В 1990 г. исполнилось 450 лет со дня рождения великого французского математика Франсуа Виета (1540—1603), творчество которого ознаменовало рождение математики Нового времени.

Многие называют Виета «отцом алгебры», а некоторые, например Б. Н. Делоне, считают даже, что алгебра началась с Виета, что до него такой науки вообще не было [1]. Такая оценка, с одной стороны, необоснованно завышена, а с другой — незаслуженно занижена.

Во-первых, алгебра существовала задолго до Виета, элементы ее мы находим еще в Древнем Вавилоне в XVIII—XIX вв. до н. э. Во-вторых, творчество Виета оказало решающее воздействие не только на алгебру, но и на всю математику XVII—XVIII вв., существенно изменив ее характер. Чтобы показать это, сделаем небольшой экскурс в историю математики.

Известно, что естествознание Нового времени было воодушевлено идеями о преобразовании природы и покорении ее, которые, вероятно, берут начало от средневековой магии. И мы, увы, знаем, к чему они привели в наше время! Вместе с тем в естествознание вошел экспериментальный метод, который до того существовал в зачаточном состоянии. Оба этих фактора и обусловили характерные отличия естествознания Западной Европы от античного. Но что происходило в математике? Изменилась ли она качественно или продолжала плавно и непрерывно развиваться, прибавляя к известным фактам и теоремам новые предложения того же типа?

Обратимся к истории. Математические знания накапливались народами всего мира, составляя неотъемлемую часть их общей культуры. На этой стадии истории нашей науки сложились понятия целого числа, величины, фигуры, были выработаны первые системы счисления, способы счета и измерения. Эту стадию прошли все народы, однако раньше всех — египтяне и вавилоняне (XVIII—XIX вв. до н. э.). В Вавилоне, как мы говорили, были развиты даже элементы алгебры. Примерно ту же систему знаний мы находим в Китае, Индии, у индейцев майя и многих других народов. Однако математики как абстрактной дедуктивной науки еще не было. Математические знания на этой стадии излагались догматически в виде готовых рецептов. Ни одного записанного доказательства ни у одного из народов, прошедших этот период, не обнаружено. Это, конечно, не означает, что рассуждения не применялись вообще. Но основной интерес состоял в нахождении способа получения конечного результата, а не в обосновании и исследовании этого способа. Запас знаний пополнялся чрезвычайно медленно. Тысячелетиями он оставался в основном стабильным, передаваясь из поколения в поколение.

И вдруг в VI в. до н. э. в Древней Греции происходит взрыв, качественный скачок: рождается математика как абстрактная дедуктивная наука, начинается построение первых математических теорий. Как и почему это произошло, мы почти ничего не знаем. Известно только место и время рождения математики и имена ее основателей — Фалес и Пифагор. Больше нигде на земле, ни у одного народа не произошло ничего подобного. Таким образом, мы имеем дело с уникальным явлением. Более уникальным, чем рождение примерно в это же время греческой демократии, так как аналогичный строй был установлен параллельно в Риме. Следуя заветам Аристотеля, мы не будем искать объяснения этому явлению, поскольку наука может познавать только общие явления, но не индивидуальные («Опыт есть знание индивидуальных вещей, а искусство —

знание общего» [2]). Скажем только, что математика как наука не является, по-видимому, необходимой частью культуры народа (как, впрочем, и технический прогресс). Если не было цивилизаций без религиозных верований, без собственной мифологии, музыки, эпоса, то без математики как науки обходились многие цивилизации, пользуясь лишь тем запасом математических знаний, о которых мы говорили.

В последующие три века (V—III до н. э.) в Греции были построены глубокие и красивые математические теории, такие, как евклидова геометрия, теория конических сечений (т. е. кривых второго порядка), общая теория отношений (первый вариант теории вещественного числа), элементы теории пределов, созданы мощные методы (например, метод верхних и нижних интегральных сумм, методы касательных и экстремумов). При этом основанием и языком античной математики была геометрия. Сама алгебра облачилась в геометрические доспехи: ее операции применялись непосредственно к отрезкам, прямоугольникам и прямоугольным параллелепипедам. Это позволило доказать геометрическим ряд алгебраических тождеств, установить некоторые важные свойства алгебраических операций (например, дистрибутивность умножения относительно сложения) и решить квадратные уравнения (имеющие положительные действительные корни), а также уравнения, сводящиеся к цепочке квадратных.

Наряду с несомненными достоинствами «геометрическая алгебра» обладала и значительными недостатками: она была мало оперативной, в ней можно рассматривать только такие тождества и уравнения, которые допускали интерпретацию в трехмерном евклидовом пространстве (на самом деле система тождеств была построена только для квадратичных выражений, т. е. допускающих интерпретацию на плоскости). Произведение четырех величин было уже непредставимым.

Геометрический язык наложил отпечаток и на всю античную математику. Особенно это сказалось в том, что запас функций, даже алгебраических, был очень беден. Мощные общие методы греки могли применять только к весьма ограниченному числу кривых и фигур. Так, Архимед, изобретатель метода верхних и нижних интегральных сумм, применял его только для нахождения объемов тел вращения конических сечений, поверхности шара и площади витка спирали, носящей его имя. Определив площадь эллипса и сегмента параболы, он не смог найти площадь сегмента гиперболы, так как не имел средств для ее выражения. Ведь логарифмов еще не было!

Геометрический язык обусловил характерную особенность античной математики — в ней не было построено ни одного «исчисления»¹, если не считать непосредственного оперирования с числами в арифметике (где, кстати сказать, тоже не было создано позиционной системы счисления и удобных алгоритмов оперирования).

Дело начинает меняться в поздней античной математике, а именно в первые века нашей эры. Середина II и I век до н. э. были временем упадка классической античной геометрии, в этот период произошел перерыв в традиции, а новые исследования начались не как продолжение старых. На первый план выступило развитие вычислительных методов, а также плоской и сферической тригонометрии. Алгебра сбросила геометрическое облачение, величины начали восприниматься как числа. Уже Герон Александрийский (I в. н. э.) рассматривал произведение четырех величин (вспомним формулу Герона для вычисления площади треугольника по трем его сторонам), воспринимая их, очевидно, как числа. Но решительный шаг на пути становления новой алгебры был сделан Диофантом Александрийским (вероятно, середина III в.). В своей «Арифметике» он

¹ Здесь и далее под исчислением мы будем понимать систему символов, для которых определены операции типа законов композиции, причем эти операции выполняются по строго определенным правилам.

ввел *буквенные обозначения* для *неизвестного*, его первых шести положительных и шести отрицательных степеней, а также правило для их умножения, которое мы бы записали так: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$. Это был окончательный разрыв с геометрической алгеброй, так как степени выше третьей, а также отрицательные степени не имели геометрической интерпретации. Диофант ввел отрицательные числа, определив для них «таблицу умножения» и специальный знак, соответствующий нашему минусу. Он называл новые числа специальным термином, который можно перевести как «недостаток». Наконец, он ввел обозначение для знака равенства. Все это позволило ему впервые в истории человечества записать *уравнения*².

Итак, в алгебру вошли неизвестные и уравнения. Однако коэффициентами уравнения всегда служили конкретные числа. Никаких знаков для произвольных параметров у Диофанта не было. Делая подстановки, он также брал в качестве коэффициентов рациональные числа, оговаривая, что вместо этих чисел можно взять любые другие числа, удовлетворяющие некоторому условию (например, некоторое число в подстановке должно быть простым, вида $4n + 1$). Такая ситуация в алгебре сохранялась до конца XIX в. При этом на арабском востоке в средние века алгебра начала уже восприниматься как наука об уравнениях как определенных, так и неопределенных, но символы уже не применялись. Все уравнения и тождества записывались словесно с использованием строго определенных терминов. В Европе же, начиная с XIV в., ученые широко пользовались символами, но лишь для обозначений неизвестного, его степеней, некоторых операций (арифметических и извлечения корня), затем второго, третьего неизвестного. Роль параметров, как и у Диофанта, *играли конкретные числа*. Они несли, таким образом, двойную нагрузку: это были одновременно и конкретные числа и знаки для произвольных чисел.

Все это время математика существовала без формул. Сейчас это трудно представить. Но это было так. Такой она и оставалась до работ Виета.

Между тем ко времени Виета алгебра в Европе добилась больших успехов: в XVI в. были решены в радикалах алгебраические уравнения степеней 3 и 4, математики освоились с отрицательными числами (вводя их, как и Диофант, с помощью «таблицы умножения»), Рафаэль Бомбелли в своей «Алгебре» (1572 г.) ввел мнимые числа опять-таки с помощью соответствующей «таблицы умножения», т. е. чисто формально. Он сделал это после ознакомления с «Арифметикой» Диофанта, которая оказала решающее влияние на всю структуру его книги. Но в символике за это время можно отметить только одно, а именно: были введены обозначения для бесконечного числа степеней неизвестного.

Обратимся теперь к творчеству Виета. По-видимому, с самого начала его интересовали в математике эффективные алгоритмы. Уже в своей первой работе «*Capon mathematicus*» («Математические таблицы», 1579), в которой приводятся таблицы значений тригонометрических функций, он впервые в Европе применил десятичные дроби — этот универсальный вычислительный аппарат. Виет писал: «В математике... тысячные и тысячи, сотые и сотни, десятичные и десятки и прогрессии того же рода, восходящие или нисходящие, должны применяться часто, если не постоянно» (цит. по [3, с. 290]). Напомним, что знаменитая книга Симона Стевина «*La Disme*» («Десятая»), в которой популяризовались десятичные дроби, появилась только три года спустя.

Однако общий замысел Виета был много шире. Он задумал создать новую науку (назвав ее «аналитическим искусством», чтобы не применять «варварское» слово «алгебра»), столь же строгую, как геометрия древних, и столь же оперативную, как алгебра. Основы ее он изложил в трактате «*In artem analytice isagoge*» («Введение в аналитическое искусство», 1591 г.) Здесь Виет вводит буквенные обозначения для всех величин, как неизвестных (для них он

² До Диофанта применяли только словесные или словесно-геометрические формулировки, которые мы теперь можем записать в виде уравнений.

применял гласные буквы A, E, I, ...), так и для известных или параметров (их он обозначал согласными буквами B, D, F, ...). Кроме того, он принимает знаки для алгебраических операций, которые были в употреблении и до него, и получает впервые возможность записать *формулы* и построить *буквенное исчисление*.

Стремление следовать во всем геометрии древних привело к тому, что область величин, построенная Виетом, имела сложную структуру. Все величины были разбиты на ступени, в каждой из которых содержались однородные величины (мы бы сказали, что они имели одну и ту же размерность). На первой ступени находились длины, их можно было складывать и вычитать из большей величины меньшую; произведение длин образовывало площадь, которая принадлежала уже второй ступени, и т. д. В современных обозначениях область V величин Виета можно записать так:

$$V = R_+^{(1)} \cup R_+^{(2)} \cup \dots \cup R_+^{(n)} \cup \dots,$$

где $R^{(k)}$ — содержит величины размерности k и представляет собой полугруппу по сложению. Кроме того, вводятся еще две операции: если $\alpha \in R_+^{(k)}$ и $\beta \in R_+^{(l)}$, то определено их произведение $\alpha\beta \in R_+^{(k+l)}$. Если $k > l$, то определена операция деления $\alpha/\beta \in R_+^{(k-l)}$.

Таким образом выполнялся принцип Виета: *homogenea homogenei comparare* (принцип однородности). Впоследствии Декарт сумел избавиться от этого принципа, определив операцию умножения так, что приведение было одной размерности с сомножителями (т. е. область V свелась к множеству отрезков прямой). Но и до этого ученые с успехом оперировали в области V , обходя сложности путем домножения слагаемых на множители соответствующих размерностей.

Сам Виет составил трактат «*Ad logicem speciasam notae priores*» («Первые замечания к видовой логистике», 1646 г.), в котором дал вывод основных алгебраических формул, таких, как:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2; (A+B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \dots + B^n, \quad n=2, \dots, 5; B^n - D^n = (B-D)(B^{n-1} + B^{n-2}D + \dots + D^{n-1}), \quad n=2, \dots, 5,$$

и некоторых других. Мы слишком привыкли к этим формулам, чтобы оценить их значение. Но вспомним, что они выводились впервые.

В последней части этого трактата, озаглавленной «*Genesis triangulorum*» («Порождение треугольников»), Виет вводит операцию над прямоугольными треугольниками, которая эквивалентна умножению комплексных чисел. Здесь же он дает формулы, эквивалентные возведению комплексного числа в целую положительную степень для числа как в обычной, так и в тригонометрической форме [4]. Таким образом, Виет получает формулу, которая много лет спустя будет называться формулой Муавра.

Трактат этот не был опубликован при жизни Виета, но, по-видимому, быстро стал известен ученым. По крайней мере Пьер Ферма в своем письме к Френкилю, датированному 1641 г., свободно пользовался термином «порождение треугольников» — и это за 5 лет до публикации «Математических сочинений» Виета («*Opera mathematica*», 1646 г.) [5]. Дело в том, что ученые Европы давно ждали появления буквенного исчисления. Его пытался построить еще Иордан Неморарий (XIII в.), однако эта попытка закончилась неудачей: он изображал каждое произвольное число одной буквой, но не ввел специальных знаков для операций (правда, сумму a и b он записывал как ab), поэтому результат каждого отдельного действия он изображал новой буквой, которая не несла никакой информации о предшествующих операциях. Формул у него не получилось. В том же веке, несколько позже, испанский поэт, философ, богослов и математик Рамон Лулль (или Луллий) мечтал о создании логической машины, которая позволила бы и в логике заменить рассуждения чисто механическими операциями. В своей книге «*Ars magna et ultima*» («Великое и последнее искусство») он предложил построение такого механизма, состоящего из вращающихся кон-

центрических кругов. Однако и его изобретение оказалось неудобным для пользования. По-видимому, идея построения исчисления была для математиков и философов средневековья почти столь же заманчивой, как открытие «философского камня» или построение «вечного двигателя». Но осуществить ее удалось только три века спустя Франсуа Виету.

Так чем же идея создания буквенного исчисления была столь привлекательной? Что могло дать исчисление? Ведь античная математика обходилась без него! В чем принципиальное различие между фразой «квадрат суммы двух количеств равен сумме квадратов этих количеств, увеличенной на удвоенное их произведение» и формулой $(B + D)^2 = B^2 + D^2 + 2BD$? Конечно, символическая запись короче словесной, но ведь более короткую запись дает и стенография!

Основное отличие состоит в том, что над словами не определены арифметические операции. Мы не можем их складывать или умножать, тем более не можем делать подстановки. Исчисление же позволяет производить все эти действия чисто механически, не прибегая к рассуждениям. Так, из формулы для суммы квадратов, умножая его последовательно на $B + D$, можно получить формулы для $(B + D)^3$, $(B + D)^4$, ... (заметим, что эти операции нельзя было произвести и в геометрической алгебре древних). Сделав же подстановку $D = F + G$, можно из вышеприведенной формулы получить новую: $(B + F + D)^2$ и т. д. Итак, буквенное исчисление позволяет часть рассуждений заменить чисто механическими выкладками, которые в принципе может производить и машина. Математика как бы обогащается введением нового механизма, который берет на себя часть работы мозга ученого. В этом смысле принципиально новый шаг, сделанный Виетом, можно сравнить с введением машин в производство.

Сам Виет хорошо понимал значение сделанного. В посвящении к трактату «Введение в искусство анализа» он писал: «Раньше математики приносили жертвы богам, решив одну-единственную задачу из тех, что я решаю дюжинами» [5]. Отныне многие задачи, доступные раньше только гениям, будут «дюжинами» решаться хорошо обученными людьми средних способностей.

Авторы склонны увлекаться и переоценивать свое детище. Так и Виет писал, что «аналитическое искусство... по праву приписывает себе гордую задачу задач, а именно не оставить никакой задачи нерешенной». Разумеется, это была только мечта. Что же сумел сделать Виет с помощью своего исчисления? Прежде всего он применил его для исследования и решения как диофантовых, так и определенных уравнений. Он алгебраизировал методы Диофанта, использовал их для решения задачи о четырех кубах, трактовка которой Диофантом до нас не дошла, применил к диофантовым уравнениям свой метод «порождения треугольников» (т. е. комплексные числа). Виет начал построение общей теории уравнений: установил соотношения между коэффициентами и корнями уравнения, введя тем самым в рассмотрение элементарные симметрические функции, которым суждено было сыграть такую роль в истории алгебры; наконец, он широко применял линейные и нелинейные подстановки для преобразования и решения уравнений. Ему же принадлежит первое доказательство того, что в так называемом «неприводимом случае» все три корня кубического уравнения — действительные числа.

Буквенное исчисление Виета сделалось в XVII в. универсальным орудием исследования. Рене Декарт, улучшив его, построил на его основе аналитическую геометрию. Это же исчисление в работах Ферма, Паскаля, Валлиса и других применялось при разработке дифференциальных и интегральных методов, которые еще долго воспринимались как приемы алгебры бесконечного. В конце века было создано дифференциальное и интегральное исчисление — новое буквенное исчисление со своей системой символов и правил. Тогда же Ньютоном и Лейбницем были введены бесконечные степенные ряды — новый мощный аналитический аппарат. Правила этого нового исчисления позволили сотнями

решать такие задачи, которые раньше требовали тщательных индивидуальных исследований. И при этом опять-таки их применению можно было обучить почти каждого студента.

Таким образом, создание исчислений не только облегчило творческую работу ученого (оно разгружало воображение, как говорил Лейбниц), но и позволило организовать «массовое производство» грамотных математиков.

Успех создания исчислений способствовал поискам новых. И они не замедлили появиться. Так, Лейбниц, возрождая идеи Луллия, пытался создать алгебру логики (она была создана окончательно только в XIX в. Дж. Булем), он же применил двойную индексацию коэффициентов в линейных уравнениях и ввел детерминант системы таких уравнений. В XVIII в. было создано вариационное исчисление Эйлером и Лагранжем. В XIX в. исчисления стали строиться уже чуть ли не для каждой теории. Они и явились той характерной чертой, которая отличает математику Нового времени, да и современную, от античной. Рубежом становления новой математики было творчество Франсуа Виета.

XVIII век был в математике временем развития исчислений, временем раскрытия тающихся в них богатств. Эйлер, Даламбер и Лагранж, казалось, сделали все, что было возможно осуществить формальными методами. Успехи их были громадны. Однако к концу века темп исследований замедлился, ученые подошли к проблемам, которые невозможно было решить силами одних только исчислений. Приведем пример из области алгебры: уравнения степени 3 и 4 были решены в радикалах еще до Виета. Но все попытки применить новые механизмы для решения уравнения степени 5 не привели к успеху. Аналогичные «тупиковые» проблемы появились и в математическом анализе, и в геометрии. Для исследования этих проблем оказалось необходимым изменить самые глубокие математические концепции, ввести новые понятия и методы. Так, в алгебре от преобразований уравнений перешли к рассмотрению группы его корней, нормальных делителей этой группы, к введению понятия поля его расширения. В анализе сформировалось новое понятие непрерывной функции и т. п. Разумеется, продолжалось построение различных исчислений, но центр тяжести переместился на создание новых теорий, методов и понятий. В наши дни в связи с изобретением и внедрением ЭВМ механическая струя вновь выходит на передний план. Возникает идея искусственного интеллекта (уж не преобразование ли это средневековой идеи о создании гомункула?)³, теоретические изыскания несколько оттесняются... Как будет развиваться наша наука дальше, увидят потомки.

Список литературы

1. Делоне Б. Н. Пути развития алгебры // УМН. 1952. № 7:3.
2. Аристотель. Метафизика. I. 981 а — 15. М., 1977.
3. Dedron P., Itard J. Mathématiques et mathématiciens. P., 1959.
4. Славутин Е. И., Башмакова И. Г. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. М., 1989.
5. Viète F. Vietae Francisci opera mathematica. Ludguni Batavarum, 1646.

³ Это наводит на мысль, что на современную науку оказала влияние не только наука античности. Многие наши устремления несомненно связаны с концепциями, рожденными в средние века.