К ИСТОРИИ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

М. Т. ПЕРЕС ЛАРИНЬО (Куба)

1. Поиски числовой характеристики возможности наступления случайного события, начатые в XVI в., не завершились и до настоящего времени. Известно, что классическое определение вероятности как отношения числа благоприятствующих событию шансов к числу всех возможных, появилось в самом начале XVIII в. и принадлежит Я. Бернулли. Пусть это определение было еще несовершенным и четко было сформулировано лишь на простеньком примере, но оно уже появилось и стало быстро завоевывать всеобщее признание. Оно до сих пор играет серьезную роль по меньшей мере при изложении теории вероятностей учащимся, а также в многочисленных ее применениях. Позднее А. Муавр в известной книге «Учение о шансах» [1] писал: «...тогда, если какое-то событие имеет 3 благоприятствующих шанса и 2 неблагоприятствующих, дробное выражение 3/5 будет точно означать возможность появления его и может быть принято как его мера».

Статистическое определение вероятности случайного события появилось почти одновременно с классическим, и о нем писал Я. Бернулли в «Ars conjectandi» как о равноправном определении вероятности, которым можно пользоваться всегда, в том числе и в тех случаях, когда классическое определение использовать затруднительно. Характерно, что Я. Бернулли подчеркивал широкую распространенность статистического определения. Несомненно, в этом утверждении сказалось влияние Граунта и Петти — замечательных представителей политической арифметики того времени.

Приблизительно тогда же выяснилось, что классическое определение имеет ограниченную область применения и возникают ситуации, когда оно не действует, а потому необходимо какое-то естественное его расширение. Обычно считают, что таким толчком для обобщения определения вероятности послужили работы французского естествоиспытателя Ж. Бюффона (1707—1788), в которых он сформулировал знаменитую задачу о бросании иглы на разграфленную плоскость и предложил ее решение. Мы увидим, что это утверждение требует поправки, поскольку исторически оно неточно. Дело в том, что задолго до рождения Бюффона появилась работа, в которой фактически был поставлен вопрос о нахождении геометрической вероятности.

2. В английском переводе книги Х. Гюйгенса (1623—1695) «О расчетах в азартных играх» [2], осуществленном Д. Арбуснотом (1667—1735), переводчик в конце первой части сделал добавление, в котором сформулирована задача совсем другой природы, чем рассмотренные великим автором. Он назвал эту задачу трудной и поместил ее в книге Гюйгенса «для того, чтобы она была решена теми, кто считает такого рода проблемы достойными внимания». Задача, поставленная Арбуснотом, состоит в следующем: на плоскость наудачу бросается прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b, c. Как часто параллелепипед может упасть кверху каждой из граней?

Сам Арбуснот даже не сделал попытки решения придуманной им задачи. Это было осуществлено значительно позднее Т. Симпсоном (1710—1761) в книге «Природа и законы случая» (1740), где задача была приведена под номером XXVII (см. [3]).

Идея решения, предложенная Симпсоном, состоит в следующем: опишем около параллелепипеда сферу и спроектируем из центра на поверхность сферы все ее ребра, боковые грани и основания. В результате поверхность сферы разобьется на шесть непересекающихся областей, соответствующих граням параллелепипеда. Далее Симпсон написал: «...нетрудно заметить, что определенная часть сферической поверхности, ограниченная траекторией, описанной таким образом радиусом, будет находиться в таком же соотношении к общей площади поверхности, как вероятность появления некоторой грани к единице».

В том, что было только что сказано, в полной мере заключены принципы разыскания геометрических вероятностей: вводится мера множества благоприятствующих событию случаев, и берется ее отношение к мере множества всех возможных случаев. В нашем примере мера сводится к площади поверхности. Заметим, что Симпсон ни слова не говорил о физической интерпретации решения. Ведь для того, чтобы параллелепипед упал на плоскость определенной гранью, необходимо, чтобы его центр тяжести находился над ее проекцией на плоскость падения. Однако в решении Симпсона это требование соблюдено.

В решение Симпсона вкралась вычислительная ошибка, и в результате им был найден неправильный ответ. Введем для дальнейшего обозначения: $R^2=a^2+b^2+c^2$, P_{ab}, P_{bc}, P_{ca} — вероятности выпадения параллелепипеда на определенную грань ab, bc, ca. Вероятности выпадения на какую-то из граней ab (или bc, или ca) должны быть увеличены вдвое. Формулы, о которых идет речь, должны быть таковы:

$$P_{ab}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{ab}{cR}, \quad P_{bc}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{bc}{aR}, \quad P_{ca}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{ac}{bR}.$$

3. Бюффон дважды публиковал работы, посвященные использованию геометрических соображений для подсчета вероятностей случайных событий. Первая его публикация на эту тему относится к 1733 г., когда он сделал в Парижской Академии наук доклад, напечатанный под названием «Мемуар об игре франк-карро» [4]. Позднее этот мемуар был целиком включен в «Опыт нравственной арифметики» (1777) [5], являвшейся дополнением к IV тому его «Естественной истории» [1]. Цель, которую ставил перед собой Бюффон, состояла в том, чтобы показать, что «геометрия может быть использована в качестве аналитического инструмента в области теории вероятностей», в то время как до тех пор «геометрия казалась мало пригодной для этих целей», поскольку для них использовалась только арифметика.

Игра франк-карро состоит в следующем: пол разделен на одинаковые фигуры. На пол бросается монета, ее диаметр r меньше каждой из сторон, и монета целиком укладывается внутрь фигуры. Чему равна вероятность того, что монета пересечет одну или две стороны фигуры?

Для определенности рассмотрим покрытие плоскости прямоугольниками со сторонами a и b, $a>2r$, $b>2r$. Легко подсчитать, что площадь полосы между основным прямоугольником и прямоугольником со сторонами, параллельными сторонам основного, на расстоянии r от каждой из его стороны и целиком расположенного внутри основного равна $2r(a+b-2r)$. Легко понять, что центр монеты, попав внутрь малого прямоугольника, не только не пересечет, но даже не коснется сторон основного. Значит вероятность того, что монета пересечет по меньшей мере одну из сторон основного прямоугольника, равна $2r\dfrac{a+b-2r}{ab}$.

Вторая задача, сформулированная и решенная Бюффоном, состоит в следующем: плоскость разграфлена равноотстоящими параллельными прямыми. На плоскость наудачу бросается игла. Один игрок утверждает, что игла пересечет одну из параллельных прямых, другой — что не пересечет. Определить вероятности выигрыша каждого из игроков. Решение этой задачи хорошо известно, и нет необходимости приводить его здесь. Менее известна задача Бюффона об игле, когда игла бросается на плоскость, разграфленную на квадраты. В решении этой задачи Бюффон допустил ошибку, позднее исправленную П. Лапласом. Именно Бюффон нашел, что искомая вероятность равна $2r\dfrac{a-r}{\pi a^2}$, тогда как в действительности она равна $4r\dfrac{2a-r}{\pi a^2}$.

4. Задачи на геометрические вероятности после Бюффона стали систематически включаться в трактаты и учебники по теории вероятностей. Так, в знаменитую книгу Лапласа «Аналитическая теория вероятностей» [7] были включены и подробно рассмотрены все задачи Бюффона. Правда, Лаплас нигде не отметил, откуда эти задачи были заимствованы.

Следует заметить, что терминология Лапласа далека от совершенства. Так, например, он писал, что «$8r$ равняется сумме всех случаев, в которых игла пересекает одну или другую параллельную линию» и что $2a\pi$ равно «числу всех возможных комбинаций». Здесь r означает половину длины иглы, a — расстояние между параллельными прямыми.

Во второй задаче, рассмотренной Лапласом, плоскость разграфлена двумя системами параллельных прямых, представляющих не что иное, как систему координатных

[1] Следует заметить, что упомянутую работу 1733 г. нередко забывают. О ней нет упоминания в [6, с. 147].

линий на плоскости. Расстояние между линиями первой системы a, второй системы — b. На плоскость бросается игла длиной $2r$ ($2r<a$, $2r<b$). Чему равна вероятность того, что игла пересечет хотя бы одну линию? Решение, предложенное Лапласом, предполагает, что дело идет о системах взаимно перпендикулярных прямых. Это Лапласом не оговорено. В результате вычисления «числа благоприятствующих» и «числа всех возможных случаев» Лаплас определил, что «вероятность пересечения одной из линий брошенной иглой равна $4r\,\dfrac{a+b-r}{\pi ab}$».

В прекрасном для своего времени учебнике «Основания математической теории вероятностей» (1846) [8] В. Я. Буняковского (1804—1889) имеется довольно большой раздел, посвященный геометрическим вероятностям. В него включены задача Бюффона о бросании иглы и частный случай игры франк-карро, когда плоскость разбита на равнобедренные треугольники. С современных позиций терминология Буняковского также далека от совершенства. Например: «...иногда встречаются такие случаи, в которых число благоприятствующих статочностей, а равно и всех возможных, бывает бесконечное. Искомая вероятность определится тогда отношением этих двух бесконечных чисел...», оно будет «числом конечным и совершенно определенным».

5. Серьезный шаг в развитии геометрических вероятностей связан с именами Ламе (1795—1870), Барбье, Сильвестера (1814—1897), Крофтона, которые не только поставили новые задачи, но и привлекли к их решению понятие меры множества (пусть еще на интуитивном уровне). На базе этих исследований позднее возникла новая ветвь геометрии, получившая название интегральной геометрии.

В 1860 г. Ламе на факультете наук Парижской Нормальной школы прочитал курс лекций по геометрии. В этом курсе он рассмотрел задачу Бюффона о бросании иглы и применил ее к тому случаю, когда центр иглы бросается наудачу в центр эллипса или правильного многоугольника. Среди слушателей был Барбье, обобщивший рассуждения Ламе на случай любого выпуклого контура. В сущности Барбье не внес в сам метод ничего нового. Он только заметил, что рассуждения Ламе не связаны ни с рассмотрением эллипса, ни с правильными прямоугольниками, а легко обобщаются на любой выпуклый контур.

Дж. Дж. Сильвестер [9] первый после Бюффона расширил тематику задач на геометрические вероятности. Им была предложена задача о четырех точках, или задача Сильвестера. Ее формулировка такова: четыре точки взяты наудачу внутри выпуклой области. Чему равна вероятность того, что, взяв эти точки в качестве вершин, можно составить выпуклый четырехугольник?

Сильвестер предложил следующее решение: обозначим через A площадь выпуклой области. Бросим в нашу область сначала три точки и построим по этим точкам треугольник. Пусть его площадь равна M. Бросим теперь наудачу четвертую точку. Если она попадет внутрь треугольника, то по этим четырем точкам выпуклого четырехугольника составить нельзя. Таким образом, вероятность того, что четвертая точка приведет к невыпуклому четырехугольнику, равна M/A. Но четвертую точку мы можем выбрать четырьмя различными способами, следовательно, при бросании четырех точек вероятность получить невыпуклый четырехугольник равна $4M/A$. Отсюда заключаем, что вероятность получения при этом выпуклого четырехугольника равна $1-4M/A$. Среднее значение M зависит от области, в которую бросают точки. Для некоторых выпуклых фигур значение M вычислено. Крофтон [10, с. 786], цитируя работу Вольхауза, напечатанную в журнале «Educational times» за 1867 г., привел следующую таблицу, из которой легко получить и значение M для соответствующих выпуклых областей:

Вероятность	Треугольник	Параллелограмм	Правильный шестиугольник	Окружность
$p=$	$1/3=0,3333$ . . .	$11/36\approx0,3056$	$289/972\approx0,2971$	$35/12\pi^2\approx0,2955$

Сильвестер отчетливо понимал, что при вычислении геометрических вероятностей приходится брать отношения площадей или объемов (общее — мер) тех областей, которые благоприятствуют событию и в которых помещаются все возможные события. Фактически так поступали и раньше. Но при этом произносили другие слова, которые или не имели определенного смысла, или же не соответствовали производимым действиям. Сравнив результаты вычислений для различных областей, Сильвестер предложил найти те области, для которых вероятность получения выпуклого четырехугольника достигает максимума и минимума. Первые результаты принадлежат Крофтону [10, с. 785]. Он доказал, что для круга достигается максимум. Кроме того, он высказал предположение, что максимум достигается и для эллипса. Это предложение было доказано лишь Бляшке [11, с. 55]. Дельтейль показал, что минимальная вероятность формирования выпуклого четырехугольника достигается для треугольной области.

6. В учебной литературе широко известна задача о встрече. Спрашивается, когда она появилась и кто был ее автором? Этот вопрос был задан мне моим научным руководителем Б. В. Гнеденко. При просмотре литературы удалось найти однозначный ответ. В 1886 г. появилась книга Уайтворса «Выбор и шанс» [12], в главе III которой на с. 242—243 была рассмотрена следующая задача: лица A и B независимо один от другого отправляются на прием. Лицо A прибывает на прием в наудачу выбранный момент между 3 и 5 часами пополудни, а B — между 4 и 7 часами пополудни. Каждый из них остается на приеме в течение часа. Чему равна вероятность того, что хотя бы один момент они окажутся на приеме одновременно?

Задача была решена Уайтворсом обычным путем, какой используется и в настоящее время. Легко подсчитать, что искомая вероятность равна 1/3. Позднее эта задача перекочевывала из книги в книгу в качестве иллюстративного примера, а также применялась в задачах организации производства. В результате к ней привыкли настолько, что даже забыли имя ее автора.

7. Несомненно, в XIX в. на развитие проблематики геометрических вероятностей особое влияние оказал Крофтон. Он начал изучать пересечение случайными прямыми заданных выпуклых контуров. Мы не станем здесь излагать, его результаты, поскольку они вошли в курсы интегральной геометрии и монографии по геометрическим вероятностям, а потому легкодоступны.

На необходимость совершенствования понятия вероятности оказала несомненное влияние книга Ж. Бертрана (1822—1900) «Исчисление вероятностей» [13], в которой на хорошо подобранных примерах было показано, что логически понятие геометрической вероятности не выдерживает критики. Играя на неопределенности терминологии, он, казалось бы, для одной задачи получил несколько различных ответов. В качестве основной мишени им была выбрана известная задача о проведении случайной хорды внутри круга. Нет сомнения, что критика Бертрана привлекла внимание математиков к вопросам обоснования теории вероятностей.

В XX в. интерес к геометрическим вероятностям не ослабел, а возрос, поскольку помимо чисто математического интереса они приобрели и серьезное прикладное значение в задачах медицины, биологии, инженерного дела и др. Этот аспект теории геометрических вероятностей заслуживает специальной статьи.

Литература

1. *Moivre A.* The doctrine of chances. 2 ed. London, 1738, p. 1—2.
2. *Huygens Ch.* The laws of chances. 4-th ed. London, 1738.
3. *Simpson T.* The nature of chances. London, 1740, p. 67—70.
4. *Buffon G.* Note à la histoire... des sciences. Paris, 1733, p. 43—45.
5. *Buffon G.* Essai d'arithmétique morale, Paris, 1777, p. 95—105.
6. *Бляшке В.* Лекции по интегральной геометрии.— Успехи мат. наук, 1938, вып. V.
7. *Laplace P.* Théorie analytique des probabilités. Paris, 1812.
8. *Буняковский В. Я.* Основания математической теории вероятности. Спб., 1846.
9. *Sylvester J. J.* On a special class of questions on the theory of probability, Report of the British Association, 35. London, 1865.
10. *Crofton M.* Probability, Encyclopaedia Britannica, 9-th ed, v. 19. Edinburg, 1885.
11. *Blaschke W.* Vorlesungen über Differentialgeometrie. B. II. Berlin, 1923.
12. *Whitworth W. A.* Choice and Chance. London, 1886.
13. *Bertrand J.* Calcul des probabilités. Paris, 1899.