

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МОДЕЛЬ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ПРОДУКТА НА ОСНОВЕ
ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОГО ТРЕНДА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ
АСИММЕТРИЕЙ

© 2012 г. В.К. Семёнычев, А.А. Коробецкая

(Самара)

Предложена математическая модель жизненного цикла продукта (товара, услуги, организации) в виде дробно-рационального тренда с произвольной асимметрией. Рассмотрены основные характеристики модели и ее отличия от известных моделей жизненного цикла. На примере моделирования и прогнозирования долей рынка наиболее распространенных операционных систем с помощью данной модели показана высокая точность моделей и прогнозов.

Ключевые слова: модель, тренд, дробно-рациональная функция, жизненный цикл, этапы, операционная система, коэффициент детерминации, коэффициент несоответствия Тейла.

Моделирование и прогнозирование жизненных циклов продуктов (товаров, услуг, организаций и др.) для принятия управленческих (маркетинговых, технологических и др.) решений относится к актуальным задачам современной экономики. Общепризнанным является выделение в жизненном цикле продукта (ЖЦП) таких основных фаз, как возникновение (выведение), рост, насыщение, зрелость и спад, отражающих динамику уровней различных показателей ЖЦП: объемов продаж, спроса, объемов добычи нефти и т.д. Практика демонстрирует многообразие траекторий жизненного цикла. Форма кривой траектории зависит от конкретного вида продукта, а также от внешних условий, в которых он реализуется. Различия могут проявляться в наличии и числе точек перегиба, уровнях начальной и конечной фаз жизненного цикла, симметричности кривой относительно точки максимума (последнее особенно важно для практики, поскольку у одних продуктов спад происходит быстрее роста, а у других – рост быстрее спада). Также в уровнях траектории может присутствовать колебательная (сезонная или циклическая) компонента. Возможно возникновение повторных циклов, связанных с различными управленческими решениями.

В качестве моделей жизненного цикла обычно предлагают набор графиков, которые отражают различную динамику ЖЦП и характеризуются такими неформализованными терминами, как длительное обучение, отсутствие обучения, всплеск, всплеск с остаточным рынком, провал, длинный цикл, новые подъемы и т.д. (Ламбен, 1996, гл. 7).

Известно порядка десяти “кумулятивных” (их называют также интегральными, накопленными, S-образными или логистическими) моделей динамики: Верхулста, Гомперца, Ричардса, фон Берталанффи, Басса и др. (Mahajan, Muller, Bass, 1991, p. 125–177).

Число известных импульсных моделей (дифференциальных по отношению к кумулятивным моделям) существенно меньше, но их способность тонко различать фазы ЖЦП выше. Здесь уместна аналогия интегральных функций распределения с дифференциальными плотностями распределения в теории вероятностей.

Примерами импульсных моделей могут служить тренды вида (Алексеев, Багиев, 1997, с. 75; Оразбаев, Курмангазева, Кабылхамит, 2007; Семёнычев, Куркин, 2010, с. 8):

$$Y_k = A_1 e^{-\alpha_1 k \Delta} (k \Delta)^{\alpha_2} + \varepsilon_k, \quad (1)$$

$$Y_k = T(A_0, \dots, A_p, k \Delta) e^{-\alpha_1 k \Delta} + \varepsilon_k, \quad (2)$$

$$Y_k = \frac{A_1 (k \Delta)^{\alpha_1}}{A_2 + A_3 (k \Delta)^{\alpha_2}} + \varepsilon_k, \quad (3)$$

$$Y_k = e^{-\alpha_0 + \alpha_1 k \Delta + \alpha_2 (k \Delta)^2} + \varepsilon_k, \quad (4)$$

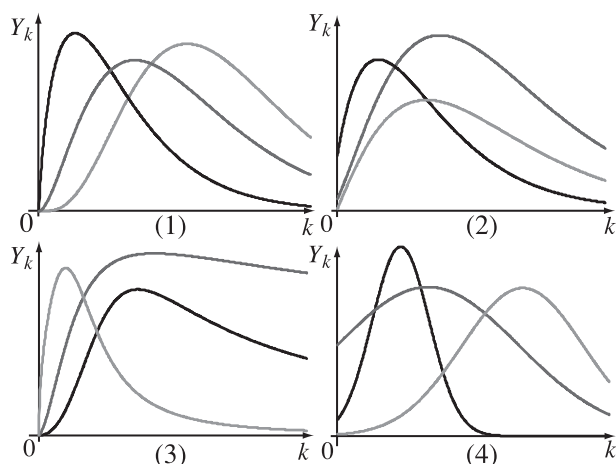


Рис. 1. Общий вид графиков известных моделей ЖЦТ (1)–(4)

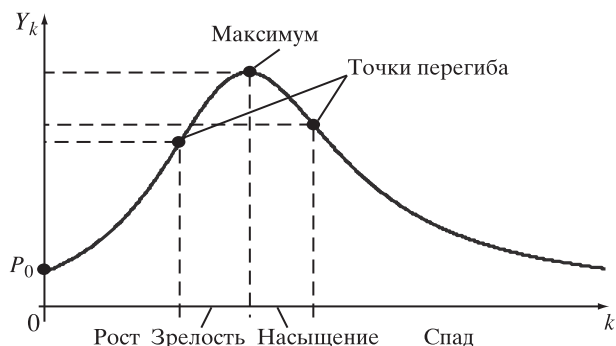


Рис. 2. Границы этапов жизненного цикла

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, A_0, \dots, A_3, \dots$ – параметры модели (в общем случае нецелые числа); $k = 1, \dots, n$ – номера наблюдений; n – объем выборки; Δ – период дискретизации (опроса) показателя (год, месяц, день и др.); ε_k – стохастическая компонента; $T(A_0, \dots, A_p, k\Delta) = A_0 + A_1k\Delta + \dots + A_p(k\Delta)^p$ – алгебраический полином степени p .

Для демонстрации характера динамики приведенных моделей покажем их графики при заданных значениях параметров (рис. 1). В частности, отметим, что модель (4) симметрична относительно точки максимума, а модели (1)–(3) имеют трудности идентификации при нецелых значениях α_1 и асимметричны, причем рост происходит быстрее, чем спад, т.е. асимметрия не является произвольной.

Для идентификации параметров моделей и получения их оптимальных (несмещенных, эффективных и состоятельных) оценок, как правило, применяют метод наименьших квадратов (МНК), считая справедливыми условия Гаусса–Маркова (центрированность, отсутствие автокорреляции, гомоскедастичность) для стохастической компоненты.

Модели (1)–(4) являются нелинейными по параметрам, что затрудняет их идентификацию, особенно на коротких выборках, которые характерны для реальных условий эволюции динамики.

Лишь уравнение (2) обладает возможностью идентификации с высокой точностью на относительно коротких выборках при малых значениях степени многочлена ($p \leq 4$) на основе обобщенных параметрических моделей авторегрессии скользящего среднего (ARMA-моделей) (Семёнычев, Семёнычев, 2006, гл. 3; Семёнычев, Куркин, 2010, с. 9–10).

Покажем, что во многих практических случаях тренд T_k может быть описан дробно-рациональной моделью с четырьмя параметрами при выборе аддитивной структуры вхождения стохастической компоненты:

$$T_k = \frac{P_0 + P_1 k\Delta}{1 + Q_1 k\Delta + Q_2 (k\Delta)^2}, \quad Y_k = T_k + \varepsilon_k. \tag{5}$$

При определенных значениях параметров модель (5) в первой координатной четверти принимает вид, соответствующий форме жизненного цикла (рис. 2). Для этого значения параметров P_0, P_1, Q_2 должны быть положительными, а Q_1 – отрицательным. Кроме того, функция (5) должна быть неразрывной, т.е. ее знаменатель не должен обращаться в ноль:

$$1 + Q_1 k\Delta + Q_2 (k\Delta)^2 \neq 0,$$

что соответствует ограничению на параметры $Q_1^2 < 4Q_2$.

Запись модели в виде (5) удобна для выполнения преобразований, но при этом параметры модели оказывают сложное влияние на ее форму, что затрудняет их выбор и анализ. Поэтому предлагается альтернативная запись:

$$T_k = \frac{\alpha A(k\Delta - B) + C}{1 + A(k\Delta - B)^2}. \quad (6)$$

Параметры α , A , B , C модели (5) однозначно связаны с P_0 , P_1 , Q_1 , Q_2 :

$$P_0 = \frac{C - \alpha AB}{1 + AB^2}, \quad P_1 = \frac{\alpha A}{1 + AB^2}, \quad Q_1 = \frac{-2AB}{1 + AB^2}, \quad Q_2 = \frac{A}{1 + AB^2}.$$

Их влияние на форму кривой иллюстрирует рис. 3. Стрелками показано изменение формы кривой при увеличении соответствующего параметра.

Параметр α влияет на симметричность жизненного цикла. При $\alpha = 0$ кривая симметрична относительно точки максимума, при $\alpha > 0$ рост происходит быстрее спада, при $\alpha < 0$ спад – быстрее роста, т.е. модель произвольной (переменной) асимметрии, определяемая параметром α .

Тренд (6) имеет единственный максимум и в случае асимметрии – единственный минимум. Тем не менее с его помощью можно моделировать и мультилогистическую динамику с повторными циклами, используя взаимодействие нескольких трендов (рис. 4). Точки максимума и перегиба отделяют стадии жизненного цикла, как это было показано на рис. 2.

Положение точки максимума может быть рассчитано по формулам:

$$B - \frac{C}{\alpha A} + \sqrt{\left(\frac{C}{\alpha A}\right)^2 + \frac{1}{A}} \quad \text{при } \alpha \geq 0;$$

$$B - \frac{C}{\alpha A} - \sqrt{\left(\frac{C}{\alpha A}\right)^2 + \frac{1}{A}} \quad \text{при } \alpha < 0.$$

Точки перегиба могут быть найдены путем приравнивания к нулю второй производной функции (6), что приводит к алгебраическому уравнению третьей степени. В бесконечности функция (6) стремится к нулю ($\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \lim_{k \rightarrow -\infty} T_k = 0$), т.е. модель предполагает, что со временем продукт полностью исчезнет с рынка.

Идентификацию параметров модели можно выполнить как путем решения нелинейного МНК, так и с помощью линеаризации (умножения на знаменатель) и реализации взвешенного МНК для обеспечения гомоскедастичности стохастической компоненты.

Небольшое число входящих в модель параметров позволяет идентифицировать ее на выборках малого объема. В то же время модель обладает значительной гибкостью и позволяет описывать широкий класс типов жизненного цикла. Достоинство предложенной модели состоит также в том, что она может применяться для описания данных, начиная с любого момента жизненного цикла (в отличие от известных моделей (1)–(3)). Это особенно важно в случаях, когда отсутствует статистика для ранних стадий цикла.

Чтобы продемонстрировать возможности предложенной модели, выполним моделирование и прогнозирование долей рынка операционных систем (ОС) семейства Windows, представленных на рис. 5.

Оценку точности моделей будем осуществлять, как это обычно делается, с помощью коэффициента детерминации R^2 (Айвазян, 2001, с. 46), а для оценки точности прогноза будем использовать коэффициент несоответствия (второй коэффициент Тейла):

$$k_{T2} = \sqrt{\frac{\sum_{k=n+1}^{n+l} \varepsilon_k^2}{\left(\sum_{k=n+1}^{n+l} Y_k^2 + \sum_{k=n+1}^{n+l} (Y_k^*)^2\right)}},$$

где l – глубина прогноза, $\varepsilon_k = Y_k - Y_k^*$ – значения ошибки прогноза, Y_k – истинные прогнозные значения, Y_k^* – прогнозные значения по модели.

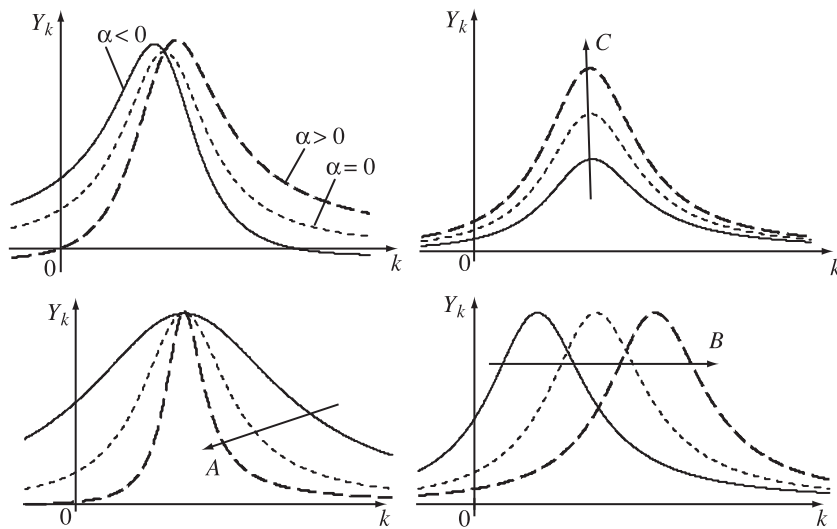


Рис. 3. Зависимость формы тренда (4) от значений его параметров

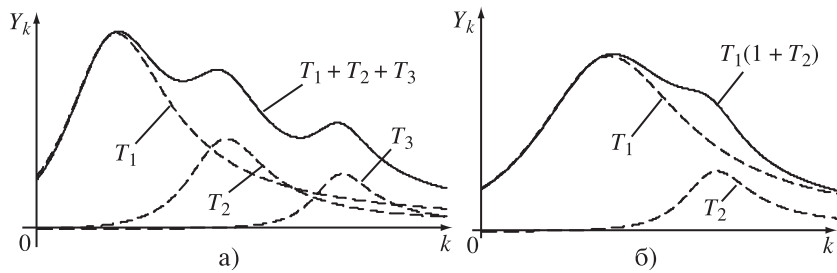


Рис. 4. Получение повторных циклов путем наложения нескольких трендов: а) аддитивно, б) мультипликативно

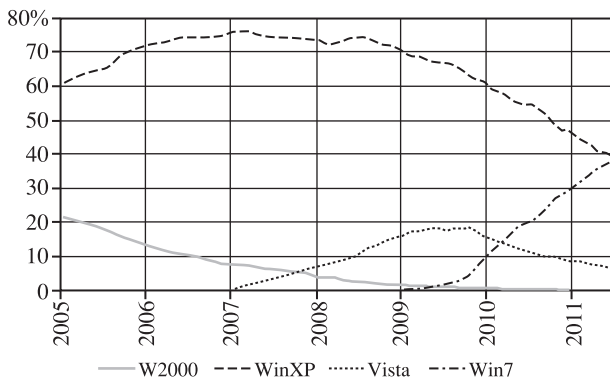


Рис. 5. Доли ОС семейства Windows на рынке
Источник: OS Platform Statistics, 2012

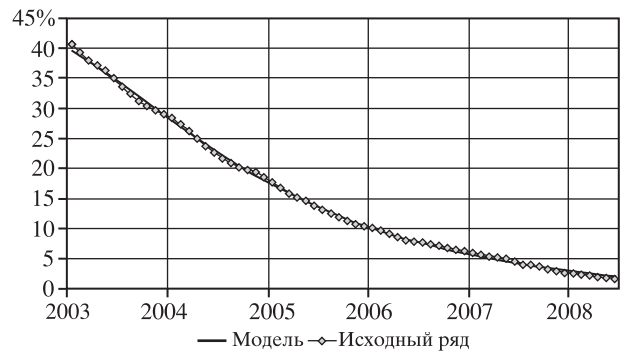


Рис. 6. Моделирование жизненного цикла ОС Windows 2000

Для каждой из рассматриваемых ОС имеются статистические данные, охватывающие различные этапы жизненного цикла.

ОС Windows 2000 находится в стадии спада, т.е. отсутствуют сведения о значительной части ЖЦП. Тем не менее предложенная модель позволяет с высокой точностью описать динамику показателя. Для оценки точности модели в качестве исходных данных будем опираться на наблюдения за 2003–2006 гг., а уровни 2007–2008 гг. вынесем в прогнозную часть. В результате идентификации получим модель со следующими значениями параметров:

$$\alpha = 605,4, \quad A = 7,73 \times 10^{-4}, \quad B = -2,4, \quad C = 43,8.$$

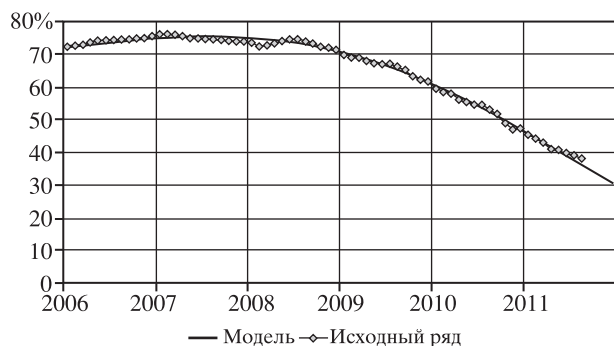


Рис. 7. Моделирование жизненного цикла ОС Windows XP

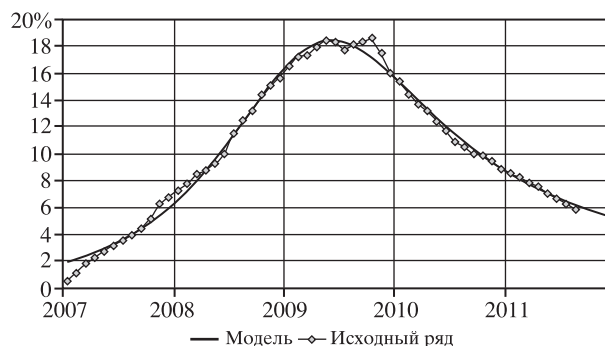


Рис. 8. Моделирование жизненного цикла ОС Windows Vista

Коэффициент детерминации модели близок к единице ($R^2 = 0,999$), а коэффициент несоответствия составляет немногим более 0,05 ($k_{T2} = 0,061$). Результат моделирования и прогнозирования показан на рис. 6.

Точка перегиба, отделяющая стадию насыщения от стадии спада, приходится на апрель 2004 г. В соответствии с построенной моделью доля ОС Windows 2000 падает ниже 5% в октябре 2007 г., а ниже 1% – в сентябре 2008 г. В реальности данные уровни были пройдены соответственно в ноябре 2007 г. и августе 2008 г., т.е. ошибка при определении данных точек составила около месяца.

Для ОС Windows XP статистика охватывает стадии зрелости, насыщения и начала спада. Для данной и последующих моделей имеющиеся данные за начало 2011 г. были вынесены в прогноз и не использовались при идентификации параметров модели. Были получены следующие оценки параметров (рис. 7):

$$\alpha = -2951,6, \quad A = 2,67 \times 10^{-4}, \quad B = -51,1, \quad C = 68,1.$$

Данная модель также характеризуется высокой точностью описания исходного ряда и прогнозирования ($R^2 = 0,987$, $k_{T2} = 0,006$).

В данном случае $\alpha < 0$, т.е. спад происходит быстрее, чем рост. Границы стадий жизненного цикла модели соответствуют сентябрю 2004 г. (началу стадии насыщения), августу 2007 г. (началу стадии зрелости) и декабрю 2010 г. (началу стадии спада). Доля ОС Windows XP на рынке достигнет порога 10% в начале 2013 г., а к 2014 г. она почти полностью исчезнет с рынка.

Среди рассматриваемых ОС Windows Vista обладает наиболее коротким жизненным циклом, а имеющаяся статистика охватывается все стадии цикла (рис. 8). Для модели данного ЖЦП получены следующие оценки параметров:

$$\alpha = 85,4, \quad A = 4,43 \times 10^{-3}, \quad B = 26,3, \quad C = 18,0.$$

Модель также обладает высокой точностью моделирования ($R^2 = 0,999$), а ошибка прогноза по модели мала ($k_{T2} = 0,016$).

В этом случае рост доли рынка происходит быстрее спада, и границы стадий цикла приходятся соответственно на сентябрь 2008 г., май 2009 г. и февраль 2010 г. Модель прогнозирует падение доли рынка Windows Vista ниже 5% уже в начале 2012 г. Однако спад в данном случае будет происходить значительно медленнее, чем у Windows XP, поэтому ее полное исчезновение с рынка, вероятно, произойдет позже.

Наибольшую сложность и интерес представляет моделирование Windows 7. Статистика охватывает стадии внедрения, роста и, возможно, начало стадии зрелости. Построение адекватной модели при такой нехватке информации требует значительной аккуратности, а при высокой зашумленности данных может оказаться невозможным.

Анализ выхода версий Windows 7 показывает, что данная кривая ЖЦТ фактически охватывает три продукта:

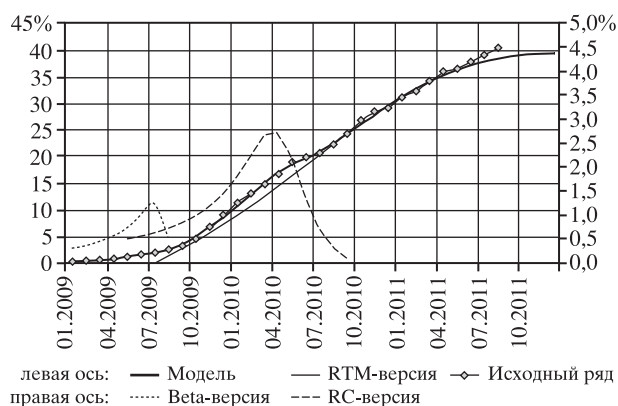


Рис. 9. Моделирование жизненного цикла ОС Windows 7

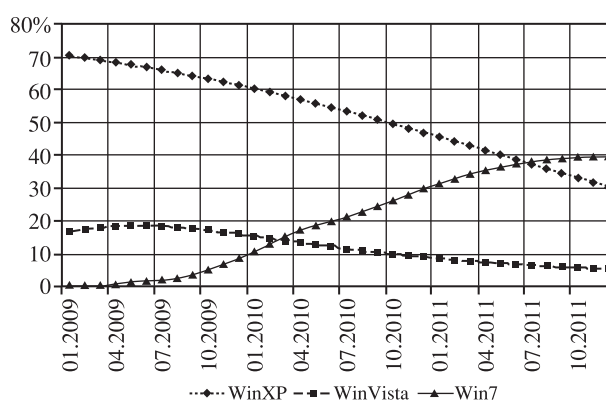


Рис. 10. Сравнение прогнозов долей рынка ОС Windows XP, Vista и 7

- в январе 2009 г. стала доступна для скачивания beta-версия Windows 7, лицензия на которую истекла в августе 2009 г.;
- RC-версия стала доступна широкой публике в мае 2009 г., а лицензия на нее закончилась в июне 2010 г.;
- окончательная (RTM) версия Windows 7 была выпущена 22 июня 2009 г.

В данном случае повторные циклы наблюдаются уже на стадии роста. Поэтому необходимо выделить три тренда, каждый из которых соответствует своей версии Windows 7. Сложность заключается в том, что эти тренды накладываются друг на друга и должны быть идентифицированы в определенной мере одновременно. Адекватное решение можно получить с помощью итеративной декомпозиции исходного ряда аналогично тренд-сезонной параметрической декомпозиции, описанной в (Семёнычев, Семёнычев, Коробецкая, 2010, с. 63–66). Построенная составная модель представлена на рис. 9, а оценки параметров равны:

для RTM-версии: $\alpha = 991,1$, $A = 1,76 \times 10^{-3}$, $B = 16,3$, $C = 28,5$;

для beta-версии: $\alpha = -2,0$, $A = 0,54$, $B = 6,7$, $C = 0,79$;

для RC-версии: $\alpha = -4,2$, $A = 0,12$, $B = 15,4$, $C = 2,6$.

Коэффициент детерминации составной модели $R^2 = 0,999$, а коэффициент несоответствия $k_{T2} = 0,008$.

Точка перегиба модели и переход от стадии роста к зрелости приходится на июнь 2010 г. Достижение максимума в районе 40% рынка ожидается в январе 2012 г., а переход к спаду – в марте 2013 г. Данный прогноз выглядит адекватным, поскольку в 2012 г. ожидается выход Windows 8. В то же время будущая форма жизненного цикла Windows 7 зависит как от ее развития, так и от характеристик новой ОС, поэтому полученный прогноз может быть скорректирован.

Что касается моделей циклов beta- и RC-версий, то они представляют собой яркий пример случая, когда спад происходит значительно быстрее роста: как только прекращается поддержка бесплатной версии программного обеспечения, она почти моментально исчезает с рынка. В то же время для окончательных версий программных продуктов возможны различные варианты асимметрии, как это и было показано ранее.

Необходимо отметить, что аналогичный анализ повторных волн для различных версий может быть выполнен и для ранее рассмотренных ОС. Однако потребности в этом не возникает, поскольку для них имеется достаточный объем данных для построения общей модели жизненного цикла.

Например, на графике ОС Windows Vista можно заметить некоторое расхождение формы модели и исходной динамики в начале цикла, когда также были выпущены предварительные версии ОС. Однако в данном случае имеется статистика по большей части жизненного цикла, благодаря чему точность прогноза и адекватность модели в целом оказывается достаточной.

В случае же Windows 7 попытка идентификации общей модели жизненного цикла по исходным данным приводит к ее значительному искажению.

В заключение сравним прогнозы для поддерживаемых в настоящий момент ОС (рис. 10). Из графика видно, что уже летом 2011 г. можно ожидать превышение доли рынка Windows 7 над Windows XP. Стремительный спад ранее популярной Windows XP и рост Windows 7 связан с рядом факторов: прекращена общая (бесплатная) поддержка Windows XP, на новых компьютерах чаще всего установлена Windows 7, которая обладает лучшими характеристиками по ряду параметров, и др.

Из представленных результатов видно, что предложенная модель позволяет с высокой точностью моделировать и прогнозировать жизненные циклы товаров на различных стадиях. Идентификация параметров модели не представляет существенной трудности и была полностью автоматизирована. Модель дает возможность описывать циклы как с быстрым ростом, так и с быстрым спадом, в отличие от известных моделей (1)–(4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Айвазян С.А.** (2001): Основы эконометрики. Т. 2. М.: ЮНИТИ–ДАНА.
- Алексеев А.А., Багиев Г.Л.** (1997): Маркетинговые основы товарного позиционирования в инновационном периоде. СПб.: СПУЭФ.
- Ламбен Ж.Ж.** (1996): Стратегический маркетинг. СПб.: Наука.
- Оразбаев Б.Б., Курмангазева Л.Т., Кабылхамит Ж.М.** (2007): Задачи прогноза и идентификации нефтедобычи, математические методы и алгоритмы их решения. [Электронный ресурс] Электронная библиотека Атырауского института нефти и газа. Режим доступа: www.aing.kz/e-lib, свободный. Загл. с экрана (дата обращения: ноябрь 2010 г.).
- Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В., Коробецкая А.А.** (2010): Метод параметрической итерационной декомпозиции тренд-сезонных рядов аддитивной структуры // *Вестник Самарского муниципального института управления*. № 1 (12).
- Семёнычев В.К., Куркин Е.И.** (2010): ARMA – моделирование уровня годовой добычи нефти из пласта и оценка геологического риска инвестиций в нефтегазодобывающей промышленности // *Вестник Самарского муниципального института управления*. № 2 (13).
- Семёнычев В.К., Семёнычев Е.В.** (2006): Информационные системы в экономике. Самара: Изд-во Самарского государственного аэрокосмического ун-та.
- Mahajan V., Muller E., Bass F.M.** (1991): New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research. In: “*Diffusion of Technologies and Social Behavior*”. Laxenburg: Springer-Verlag for the International Institute for Applied Systems Analysis.
- OS Platform Statistics** (2012): [Электронный ресурс] Сайт [w3schools.com](http://www.w3schools.com). Режим доступа: http://www.w3schools.com/browsers/browsers_os.asp, свободный. Загл. с экрана. Яз. англ. (дата обращения: февраль 2012 г.).

Поступила в редакцию
07.07.2011 г.

Product Lifecycle Model Based on Rational Trend with Free Asymmetry

V.K. Semenychev, A.A. Korobetskaya

The paper introduces product (goods, services, firm) lifecycle model based on rational trend with free asymmetry and additive stochastic component. General model features and differences from known models are considered. Market shares of leading operating systems are modeled and forecasted using the introduced model; high accuracy of the results is shown.

Keywords: model, trend, rational function, lifecycle, stages, operating system, coefficient of determination, Theil's inequality coefficient.