

ОБ ИСЧИСЛЕНИИ СРЕДНЕГО ТЕМПА РОСТА

Л. В. ДМИТРИЕВА, В. М. КОНСТАНТИНОВ

(Москва)

Важным средством макроанализа тенденций поведения экономических процессов является изучение динамических рядов и темпов изменений различных экономических показателей внутри и за пределами анализируемого периода.

Целью настоящей работы является описание возможностей применения метода наименьших квадратов для нахождения наилучшей в том или ином смысле оценки темпа роста динамического ряда. В работе приводится также решение задачи определения темпа роста при наличии распределенного запаздывания, характеризующего вклад нескольких предыдущих значений динамического ряда в его текущее значение. В этом случае учитывается поведение динамического ряда внутри интервала наблюдения. Изложение иллюстрируется экспериментальными расчетами.

1. Предположим, что мы «наблюдаем» значения динамического ряда на интервале времени $[0, T]$. Введем критерий качества аппроксимации, позволяющий оценивать меру расхождения поведения реальной модели вида $r(t) = X(t+1) / X(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$, и теоретической, которую будем искать в виде

$$X(t+1) = g(a_1, a_2, \dots, a_n, t)X(t). \quad (1)$$

Критерий качества аппроксимации с целью анализа тенденций поведения ряда можно ввести различными способами. Воспользуемся наиболее естественным при исследовании динамики экономических процессов критерием качества

$$I = \sum_{t=0}^{T-1} [g(a_1, a_2, \dots, a_n, t)X(t) - X(t+1)]^2 \gamma(t)^*. \quad (2)$$

Таким образом, I — взвешенная сумма квадратов отклонений процесса, найденного с помощью «теоретического» темпа роста от реального «наблюдаемого» процесса. Нетрудно показать, что для минимизации критерия качества (2) при $\gamma(t) = 1$, необходимо решить систему n уравнений с n неизвестными

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t=0}^{T-1} [g(a_1, a_2, \dots, a_n, t)X(t) - X(t+1)] \frac{\partial g}{\partial a_1} X(t) &= 0, \\ \sum_{t=0}^{T-1} [g(a_1, a_2, \dots, a_n, t)X(t) - X(t+1)] \frac{\partial g}{\partial a_n} X(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

* $\gamma(t)$ — функция, показывающая меру влияния текущего значения процесса $X(t)$ на будущее поведение ряда. Функция $\gamma(t)$ позволяет корректировать прогноз путем придания больших весов тем точкам (годам, факторам), которые играют преобладающую роль в прошлом и будут играть наиболее существенную роль за интервалом наблюдения $[0, T]$. В данной работе рассмотрен случай, когда $\gamma(t) = 1$.

Рассмотрим различные варианты предположений относительно вида функции $g(a_1, a_2, \dots, a_n, t)$ и выпишем соответствующие уравнения для определения искомых параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$.

1. Темп роста $g(a_1, a_2, \dots, a_n, t)$ — некоторая постоянная величина a_1 , равная среднему темпу роста. Тогда, как следует из (3), a_1 находится из соотношения

$$a_1 = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} X(t)X(t+1)}{\sum_{t=0}^{T-1} X(t)X(t)}. \quad (4)$$

При этом значения ряда $X(t+1)$ находятся из равенства: $X(t+1) = a_1 X(t)$.

2. Темп роста $g(a_1, a_2, \dots, a_n, t)$ есть линейная функция*

$$g(a_1, a_2, \dots, a_n, t) = a_1 + a_2 t. \quad (5)$$

Искомые значения a_1 и a_2 находятся из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t=0}^{T-1} [(a_1 + a_2 t) X(t) - X(t+1)] X(t) &= 0, \\ \sum_{t=0}^{T-1} [(a_1 + a_2 t) X(t) - X(t+1)] t X(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3. Темп роста $g(a_1, a_2, \dots, a_n, t)$ — квадратичная функция вида

$$g(a_1, a_2, \dots, a_n, t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2. \quad (7)$$

В данном случае для нахождения a_1, a_2, a_3 необходимо решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t=0}^{T-1} [(a_1 + a_2 t + a_3 t^2) X(t) - X(t+1)] X(t) &= 0, \\ \sum_{t=0}^{T-1} [(a_1 + a_2 t + a_3 t^2) X(t) - X(t+1)] X(t) t &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} [(a_1 + a_2 t + a_3 t^2) X(t) - X(t+1)] X(t) t^2 = 0.$$

4. Нетрудно решить систему (3) и в том случае, когда темп роста $g(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, t)$ можно представить в виде линейной комбинации некоторых заданных функций $I_1(t), I_2(t), \dots, I_n(t)$, т. е. когда

$$g(a_1, a_2, \dots, a_n, t) = a_1 I_1(t) + a_2 I_2(t) + \dots + a_n I_n(t). \quad (9)$$

Для нахождения искомых значений параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$ в данном случае необходимо решить следующую систему n уравнений с n неизвест-

* Здесь и в дальнейшем следует иметь в виду, что задание зависимости темпа роста как функции времени обязательно должно учитывать период прогнозирования. Связь периода прогнозирования с наиболее приемлемыми функциями времени здесь не рассматривается.

«ускорения» динамического ряда $\{X(t)\}^*$:

$$\begin{aligned} V(t) &= X(t+1) - X(t), \quad d(t) = V(t+1) - V(t) = \\ &= X(t+2) - 2X(t+1) + X(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Изучение поведения динамического ряда с точностью до разностей первого порядка проводится обычно с помощью понятия «скорости», приводящего к необходимости изучения разностного уравнения первого порядка

$$X(t+1) = [1 + a(t)]X(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Уравнение (18) получают из соотношения (15), предполагая значение «скорости» динамического ряда пропорциональным значению динамического ряда в данный момент времени

$$V(t) = a(t)X(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Функция $a(t)$ обычно называется темпом прироста $X(t)$.

Изучение поведения динамического ряда с точностью до разностей второго порядка приводит к необходимости исследования разностного уравнения второго порядка

$$X(t+2) = a_1(t)X(t) + a_2(t)X(t+1). \quad (20)$$

Уравнение (20) получают обычно из (15) на основании следующих естественных предположений: ускорение в момент времени t пропорционально скорости и значению динамического ряда $\{X(t)\}$ в этот момент времени, т. е.

$$a(t) = C_1(t)V(t) + C_2(t)X(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Учитывая определения скорости и ускорения из (21), нетрудно получить разностное уравнение второго порядка, эквивалентное (20)

$$\begin{aligned} X(t+2) &= [C_1(t) + 2]X(t+1) + [C_2(t) - C_1(t) + 1]X(t), \\ &t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Изучение динамического ряда с точностью до разностей первого порядка приводит, как показано в п. II, к исследованию разностного уравнения первого порядка. Такое исследование проведено в п. I.

В заключение проиллюстрируем изложенные выше методы расчета темпов роста для динамических рядов показателей капитальных вложений, валовой продукции промышленности. При этом выберем наиболее простые способы нахождения постоянного и «распределенного» темпов роста. Для случая усредненного постоянного темпа роста используется (4), для «распределенного» — формула (17). Для наглядности был проведен также расчет объемов исследуемых показателей на основе традиционного среднегеометрического темпа роста. Результаты расчетов сведены в табл. 1, 2, в которых $Y(t)$ — фактические значения исследуемого процесса, $\bar{Y}(t)$ — расчетные величины, полученные на основании усредненного постоянного темпа роста, $\tilde{Y}(t)$ — расчетные значения, найденные на основании усредненного «распределенного» темпа роста, $\hat{Y}(t)$ — расчетные значения, определенные на основании среднегеометрического темпа роста.

Расчет по предлагаемой методике проводился на основе динамических рядов за 1956—1970 гг. С помощью индексов роста показателей валовой продукции промышленности и капитальных вложений от базы 1965 г. были построены динамические ряды в сопоставимых ценах. Путем анализа участка динамического ряда в 10 лет, а именно 1956—1965 гг. каким-либо из указанных способов, рассчитывался темп роста. Он накладывался на базу 1965 г. и делался прогноз на последнюю пятилетку 1966—1970 гг. Прогнозные данные сравнивались с фактическими объемами за этот период.

* Для случая непрерывного времени эти соотношения эквивалентны соответственно $\partial X(t) / \partial t$, $\partial^2 X(t) / \partial t^2$.

Таблица 1

Объем валовой продукции промышленности [3, стр. 69, 73]. (млрд. руб. сопостав. цены)

Годы	$Y(t)$	$\bar{Y}(t) = a_1 Y(t-1)$	$\tilde{Y}(t) = a_2 Y(t-1) + a_3 Y(t-2)$	$\hat{Y}(t) = a_4 Y(t-1)$	$(Y - \bar{Y})^2$	$(Y - \tilde{Y})^2$	$(Y - \hat{Y})^2$
1965	229,4	229,4	229,4	229,4	0	0	0
1966	249,36	249,98	249,04	251,08	0,3844	0,1024	2,9584
1967	274,30	272,40	269,96	274,80	3,6100	18,8356	0,2500
1968	297,07	296,83	292,19	300,77	0,0576	23,8144	13,6900
1969	318,16	323,46	315,70	329,20	28,0900	6,0516	121,8816
1970	344,57	352,47	340,42	360,31	62,4100	17,2225	247,7476
		$a_1 = 1,0897$	$a_2 = 2,2821$ $a_3 = -1,3006$	$a_4 = 1,0945$	94,5520	66,0265	386,5276

Таблица 2

Объем капитальных вложений [3, стр. 28; 4, стр. 60, 528; 5, стр. 501].
(млрд. руб. сопостав. цены)

Годы	$Y(t)$	$\bar{Y}(t) = a_1 Y(t-1)$	$\tilde{Y}(t) = a_2 Y(t-1) + a_3 Y(t-2)$	$\hat{Y}(t) = a_4 Y(t-1)$	$(Y - \bar{Y})^2$	$(Y - \tilde{Y})^2$	$(Y - \hat{Y})^2$
1965	48,7	48,7	48,7	48,7	0	0	0
1966	52,4	52,73	52,55	53,35	0,1089	0,0225	0,9025
1967	56,7	57,09	56,70	58,45	0,1521	0	3,0625
1968	61,4	61,81	61,19	64,03	0,1681	0,0441	6,9169
1969	63,4	66,92	66,02	70,14	12,3904	6,8644	45,4276
1970	68,96	72,45	71,24	76,84	12,1801	5,1984	62,0944
		$a_1 = 1,0827$	$a_2 = 1,079058$ $a_3 = 0,000001$	$a_4 = 1,0955$	24,9996	12,1294	118,4039

Не занимаясь анализом точности полученных результатов, заметим, что на основании таблиц нетрудно выбрать наилучший вид аппроксимирующей функции для темпа роста. Интегральное отклонение теоретической кривой от эмпирической дает возможность оценить степень правильности выбора метода определения темпа роста, который дает наилучшее — по принятому критерию, — приближение прогнозных и отчетных данных. В данном случае оказалось, что «распределенный» темп роста является наилучшим способом определения прогнозных значений. Однако для оперативных расчетов можно пользоваться и усредненным «постоянным» темпом роста, дающим лучшие результаты, чем значения, полученные с помощью традиционного среднегеометрического темпа роста.

По изложенной методике аналогичные расчеты можно провести для различных рядов макроэкономических показателей, выбирая каждый раз наилучшую форму аппроксимации для темпа роста, однако уже предварительные экспериментальные расчеты подтверждают эффективность описанного метода исчисления темпов роста.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. С. Вентцель. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
2. Г. Тинтнер. Введение в эконометрию. М., «Статистика», 1965.
3. СССР в цифрах в 1970 г. М., «Статистика», 1971.
4. Народное хозяйство СССР в 1965 г. М., «Статистика», 1966.
5. Народное хозяйство СССР в 1969 г. М., «Статистика», 1970.

Поступила в редакцию
26 X 1971