ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Е. М. ОЛЕВСКАЯ

(Москва)

Задача, рассматриваемая в статье, представляет собой задачу линейного программирования транспортного типа. Особенность ограничений данной задачи приводит к необходимости разработки алгоритма ее решения, отличного от алгоритма решения транспортной задачи.

I. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Пусть планируемая работа состоит из ряда (из n) этапов. На каждом этапе в хранилища, емкость каждого из которых заранее известна, поступает по заранее составленному графику сырье. Эффективность переработки и использования сырья каждого вида и на каждом этапе также будем считать заранее заданной. Предполагаем, что в связи с сезонными колебаниями возможностей обеспечения энергией, рабочей силой, а также в связи с тем, что часть сырья и часть оборудования имеют сезонный характер, эффективность использования сырья на разных этапах выполнения программы будет различной.

Под эффективностью использования сырья можно понимать затраты на переработку единицы сырья, а также затраты на изготовление продукции из единицы сырья того или иного вида. Будем также считать, что все виды сырья выражены в таких единицах, что каждая единица независимо от вида сырья соответствует одной и той же производительности.

Введем следующие обозначения: j — этапы времени, $j = 1, \ldots, n$; i — виды взаимозаменяемого сырья, $i = 1, \ldots, m$; x_{ij} — число единиц сырья i-го вида (в условных единицах), используемого в j-й период времени; a_j — общая потребность в сырье в j-й период времени; c_{ij} — затраты на изготовление продукции из единицы сырья i-го вида на j-м этапе; $h_{i0}{}^1$ — емкость хранилища, предназначенного для сырья i-го вида; $b_{i1}{}^1$ — наличие сырья i-го вида в 1-й период времени; b_{ij}' — запланированный подвоз i-го сырья в j-й период времени.

Количество сырья, используемого на каждом этапе, должно быть равно потребности в нем

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j. \tag{1}$$

С другой стороны, во-первых, расход сырья на каждом этапе не должен превосходить запасов, накопленных к началу этапа, а, во-вторых, сырье, доставленное к началу следующего за рассматриваемым этапа, вместе с сырьем, оставшимся после его использования на данном этапе, должно быть меньше емкости хранилища. Эти рассуждения приводят к ограничениям следующего вида.

$$\sum_{j=1}^{s+1} b_{ij}' - h_{i0}' \leqslant \sum_{j=1}^{s} x_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{s} b_{ij}', \quad s = 1, \ldots, n; \ i = 1, \ldots, m.$$

Так как верхняя и нижняя границы — числа, заранее заданные, ограничения можно переписать в следующем виде

$$h_{is} \leqslant \sum_{j=1}^{s} x_{ij} \leqslant b_{is}, \quad s = 1, \ldots, n; \ i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Задача сводится к тому, чтобы составить рациональный график использования сырья, т. е. выбрать такие числа

$$x_{ij} \geqslant 0, \tag{3}$$

чтобы они обеспечивали минимум

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{4}$$

и удовлетворяли условиям (1) — (3).

Заметим, что задача (1)—(4) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{m} h_{is} \leqslant \sum_{j=1}^{s} a_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_{is}, \qquad s = 1, \ldots, n \tag{5}$$

при условии, что h_{is} и b_{is} не отрицательны и образуют убывающие последовательности при каждом фиксированном i, причем $h_{is} \leqslant b_{is}$ (и, следовательно, $b_{is} \geqslant h_{ij}$ для $j < s$). Все $b_{is} > 0$.

II. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ И СВОЙСТВА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ НАЧАЛЬНОЕ ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ

В наиболее общем виде задача оптимального временного распределения ресурсов, сформулированная выше, может быть записана следующим образом: требуется найти

$$\min F(x) = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{6}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{7}$$

$$h_{is} \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant b_{is}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \; s = 1, 2, \ldots, n; \tag{8}$$

$$x_{ij} \geqslant 0. \tag{9}$$

Здесь p_{is} равняется либо h_{is}, либо b_{is}.

Для решения задачи, а также для вывода критерия оптимальности из системы неравенств (8) выделим те, которые на некотором решении $X = \{x_{ij}\}$ задачи (6)—(9) выполняются как равенства

$$i \in M_i \quad M_i = (i, s_1, \ldots, s_{k_i});$$

$$\sum_{j=1}^{s_t} x_{ij} = p_{is_t}, \qquad i = 1, \ldots, m; \quad t = 1, 2, \ldots, k_i. \tag{10}$$

Здесь p_{is_t} равняется либо h_{is_t}, либо b_{is_t}.

На основании теоремы двойственности в условия оптимальности задачи (6)—(9), кроме условий (7) и (9), войдут следующие

$$c_{ij} \geqslant u_{is_t} - \lambda_j \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; s_t = 1, 2, \ldots, k_i; \; s_{t-1} < j \leqslant s_t; \tag{11}$$

$$c_{ij} = u_{is_t} - \lambda_j, \quad \text{если } x_{ij} > 0; \tag{12}$$

$$u_{is_t} \leqslant u_{is_{t+1}}, \quad \text{если } p_{is_t} = b_{is_t}; \tag{13}$$

$$u_{is_t} \geqslant u_{is_{t+1}}, \quad \text{если } p_{is*_t} = h_{is_t}. \tag{14}$$

Систему равенств (10) можно преобразовать таким образом, что каждая переменная будет входить только в одно равенство. Для этого из каждого равенства системы (10) вычтем, начиная со второго, предыдущее равенство, оставив первое без изменения, и получим

$$\sum_{j=s_r+1}^{s_{r+1}} x_{ij} = p_{is_{r+1}} - p_{is_r} = \bar{p}_{is_{r+1}}, \quad r = 1, 2, \ldots, (k_i - 1); \quad s_r = 0, s_1, s_2, \ldots, s_{k_i-1}; \; i = 1, 2, \ldots, m. \tag{15}$$

Совокупность элементов x_{ij}, входящих в одну и ту же сумму, будем называть *группой*. Пусть $\|x_{ij}\|$ — решение системы (7)—(9). На основе плана $X = \|x_{ij}\|$ из системы неравенств (8) образуется: 1) ряд равенств вида (10), которые преобразовываются в систему (15);

2) ряд неравенств, которые при помощи дополнительных неизвестных можно обратить в равенства.

$$\sum_{j=j_{n-1}+1}^{j_n} x_{ij} + x_{i\,n+1} = b_{in} \qquad i \in p, \tag{16}$$

где p — число образовавшихся неравенств.

Дополнив системы (15) равенствами (16), получим систему (15′):

$$\sum_{j=s_r+1}^{s_{r+1}} x_{ij} = \bar{p}_{is_{r+1}}, \tag{15′}$$

где $r = 1, 2, \ldots, k_i, s_r = 0, s_1, \ldots, s_{k_i}, i = 1, 2, \ldots, m$ и где $\bar{p}_{is_{k_i+1}} = b_{in}$, $i \in p$.

Сумма дополнительных неизвестных образует новое уравнение типа (7)

$$\sum_{i\in p} x_{i\,n+1} = \sum_{i\in p} b_{in} - \sum_{j}^{n} a_j = a_{n+1}. \tag{17}$$

Относительно системы уравнений (7), (15′), (17) легко показать, что число линейно независимых уравнений, а также число базисных переменных $x_{ij} \in E(x)$ $(E(x) = \{x_{ij} / c_{ij} = u_{is} - \lambda_j\}$ строго равно $N + k - 1$, где N — число столбцов, а k — число групп матрицы $\|x_{ij}\|$. Нетрудно показать отсутствие замкнутых цепочек и связность множества базисных переменных (определения этих понятий см. [1]).

III. ОПИСАНИЯ И АЛГОРИТМ МЕТОДА

Метод решения задачи (6) — (9) состоит из ряда этапов. На *предварительном этапе* отыскивается начальное возможное решение, а затем вычисляются потенциалы u_i и λ_j.

Для нахождения начального возможного опорного решения можно использовать идею метода минимального элемента. При этом надо учитывать не только возможности увеличения данной переменной, но и ограничения на остальные переменные, чтобы ни одно из условий (2) — (4) не нарушилось.

Нахождение начального возможного решения включает в себя следующие последовательные действия:

1) отыскать $\min c_{ij} = c_{i_t j_t}$;

2) назначить

$$x^{(t)}_{i_t j_t} = \min \Bigg[a^{(t-1)}_{j_t};\ b^{(t-1)}_{i_t j_t} - h^{(t-1)}_{i_t j_{t-1}};\ \sum_{i \neq i_t} b^{(t-1)}_{ij_s} + b^{(t-1)}_{i_t j_t} - \sum_{j=1}^{j_s} a^{(t-1)}_j,\ \ (j_s < j_t);$$

$$\sum_{j=1}^{j_k} a^{(t-1)}_j - h^{(t-1)}_{i_t j_{t-1}} - \sum_{i \neq i_t} h^{(t-1)}_{ij_k}\ (j_k > j_t) \Bigg];$$

3) если $x^{(t)}_{i_t j_t} = a^{(t-1)}_{j_t}$, вычеркивается столбец j_t в матрице коэффициентов $\|c_{ij}\|$; если $x^{(t)}_{i_t j_t} = b^{(t-1)}_{ij_t} - h_{ij_{t-1}}$, или $x^{(t)}_{i_t j_t} = \sum\limits_{i \neq j_t} b^{(t-1)}_{ij_{t-1}} + b^{(t-1)}_{i_t j_s} - \sum\limits_{j=1}^{j_s - 1} a^{(t-1)}_j$, или $x^{(t)}_{i_t j_t} =$

$$= \sum_{j=1}^{j_k} a^{(t-1)}_j - \sum_{i \neq i_t} h^{(t-1)}_{ij_k} - h^{(t-1)}_{i_t j_{t-1}},$$

то вычеркивается элемент $c_{i_t j_t}$. Это равносильно вычеркиванию строки при построении начального возможного плана транспортной задачи;

4) пересчитываются значения $b^{(t)}_{i_t j}$, $h^{(t)}_{i_t j}$, $a^{(t)}_j$

$$b^{(t)}_{i_t j} = \begin{cases} \min\left(b^{(t-1)}_{i_t j_t} - x^{(t)}_{i_t j_t};\ b^{(t-1)}_{i_t j}\right) & \text{при } j < j_t, \\ b^{(t-1)}_{i_t j} - x^{(t)}_{i_t j_t} & \text{при } j \geqslant j_t. \end{cases}$$

$$h_{i_t j}^{(t)} = \begin{cases} h_{i_t j}^{(t-1)} & \text{при } j \leqslant j_{t-1}; \\ \max\left(h_{i_t j}^{(t-1)} - x_{i_t j_t}^{(t)};\ h_{i_t j_{t-1}}^{(t-1)}\right) & \text{при } j > j_{t-1}; \end{cases}$$

$$a_j = \begin{cases} a_j^{(t-1)} & \text{при } j \neq j_t, \\ a_j^{(t-1)} - x_{i_t j_t}^{(t)} & \text{при } j = j_t. \end{cases}$$

Можно показать, что если начальное возможное решение получается описываемым способом, то и для пересчитанных значений величин h, b, a сохраняется соотношение (5);

5) если множество индексов (i, j) в матрице $\|c_{ij}\|$ не пусто после вычеркивания элементов или столбцов, повторяем шаги (1)—(4), если пусто — получено начальное возможное решение $x^{(0)} = \|x_{ij}^{(0)}\|$.

В образовавшейся матрице $\|x_{ij}^{(0)}\|$ в каждой строке ставятся метки, разбивающие переменные на группы, соответствующие равенствам (15′). Верхние метки ставятся за теми переменными, сумма которых равна $b_{is}^{(0)}$, а нижние — за теми, сумма которых равна $h_{is}^{(0)}$.

Далее, для полученного плана $x^{(0)}$ вычисляются потенциалы u_{is} и λ_j из системы (11) $c_{ij} = u_{is}^{(0)} - \lambda_j^{(0)}$, $j \leqslant s$ подобно тому, как это делается для транспортной задачи. Так же как и в транспортной задаче, процесс нахождения потенциалов непрерывен и значения их определяются однозначно для каждой заданной величины $u_{is_t}^{(0)}$ или $\lambda_1^{(0)}$.

С помощью потенциалов план $X^{(0)}$ проверяется на оптимальность. Если все условия оптимальности (11), (13), (14) выполняются, то получено оптимальное решение. В противном случае выбирается то условие, которое максимально не удовлетворяется, и осуществляется переход к новому плану $X^{(1)}$, что составляет следующую итерацию метода.

При выборе условия оптимальности может, естественно, представиться три случая: а) выбранное неудовлетворенное неравенство связано с $x_{ij} = 0$ (условие оптимальности (11));

б) выбранное условие связано с $\sum\limits_{j=s_{t-1}}^{s_t} n_{ij} = h_{i_t s_t}$ (условие (13));

в) выбранное условие связано с $\sum\limits_{j=s_{t-1}}^{s_t} x_{ij} = h_{i_t s_t}$ (условие (14)).

При выборе условия а) переход к новому опорному плану осуществляется аналогично методу потенциалов для транспортной задачи и не представляет особого интереса.

Нарушение условий оптимальности (13) и (14) приводит к необходимости изменения двух соседних равенств системы (15)

$$\sum_{j=s_{t-1}}^{s_t} x_{ij}(\theta) = \bar{p}_{is} - \delta\theta, \qquad \sum_{j=s_t+1}^{s_{t+1}} x_{ij}(\theta) = \bar{p}_{is_{t+1}} + \delta\theta,$$

где

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{в случае а)} \\ -1 & \text{в случае б).} \end{cases}$$

Эти два соседних равенства объединяются. Возникает замкнутая цепочка, вдоль которой и производится изменение переменных $x_{ij}^{(0)}$. При построении этой цепочки, а также цепочки в случае а) ее элементы пронумеровываются, начиная с элемента $x_{i_t j_t}$, которому присваивается номер 1. Множество индексов (i, j) элементов с нечетными номерами обозначается через I_1, а элементов с четными номерами — I_2.

Число $\theta > 0$ должно выбираться так, чтобы 1) ни одна из переменных, стоящих в цепочке, не стала отрицательной (θ_1); 2) ни одно из ограничений (8) задачи не нарушилось (θ_2, θ_3), т. е. чтобы

$$\bar{b}_{is} = b_{is} - \sum_{j=1}^{s} x_{ij} \geqslant 0,$$

$$\overline{h}_{is} = h_{is} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 0 \qquad \text{для всех } (i,j) \in I,$$

где $I = I_1 + I_2$.

Следовательно, $\theta_1^{(t)} = \min(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(t)}, \theta_3^{(t)})$, где

$$\theta_1^{(t)} = \begin{cases} \min\limits_{(i,j)\in I_2} x_{ij}^{(t-1)} & \text{в случае а) и в)}, \\ \min\limits_{(i,j)\in I_1} x_{ij}^{(t-1)} & \text{в случае б)}. \end{cases}$$

$$\theta_2^{(t)} = \min_{(i,j)} \left\{ \min_{j_s \leqslant j < j_{s+1}/j_s < j_{s+1}} \overline{b}_{ij}, \min_{j_{s+1} \leqslant j < j_s/j_{s+1} < j_s} |\overline{h}_{ij}| \right\},$$

где $j_s \in I_1$, $j_{s+1} \in I_2$ в случае а), в), $j_s \in I_2$, $j_{s+1} \in I_1$ в случае б).

$$\theta_3^{(t)} = \min_{(i,j)} \left\{ \min_{j_{s+1} \leqslant j < j_s/j_s < j_{s+1}} \overline{b}_{ij}, \min_{j_s \leqslant j < j_{s+1}/j_s < j_{s+1}} |\overline{h}_{ij}| \right\},$$

где $j_s \in I_2$, $j_{s+1} \in I_1$ в случае а), в), $j_s \in I_1$, $j_{s+1} \in I_2$ в случае б).

После нахождения числа θ производится изменение переменных и вспомогательных величин:

$$x_{ij}^{(t)} = \begin{cases} x_{ij}^{(t-1)} + \delta\theta^{(t)} & \text{для } (i,j) \in I_1, \\ x_{ij}^{(t-1)} - \delta\theta^{(t)} & \text{для } (i,j) \in I_2, \\ x_{ij}^{(t-1)} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$b_{ij}^{(t)} = \begin{cases} b_{ij}^{(t-1)} + \delta\theta^{(t)} & \text{для } j_s \leqslant j < j_{s+1}/j_s < j_{s+1},\ j_s \in I_1, \\ b_{ij}^{(t-1)} - \delta\theta^{(t)} & \text{для } j_{s+1} \leqslant j < j_s/j_s > j_{s+1},\ j_s \in I_1; \end{cases}$$

$$h_{ij}^{(t)} = \begin{cases} h_{ij}^{(t-1)} + \delta\theta^{(t)} & \text{для } j_s \leqslant j < j_{s+1}/j_s < j_{s+1},\ j_s \in I_1, \\ h_{ij}^{(t-1)} - \delta\theta^{(t)} & \text{для } j_{s+1} \leqslant j < j_s/j_s > j_{s+1},\ j_s \in I_1; \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{в случае а) и в)}, \\ -1 & \text{в случае б)}. \end{cases}$$

После получения нового плана $X^{(t)}$ возвращаемся к первому этапу метода — построению потенциалов и проверке плана на оптимальность. Можно показать, что реализация нового плана приводит к уменьшению линейной формы (7) во всех трех случаях — а), б), в), однако это вытекает из того, что данный алгоритм — реализация симплексного метода. Через конечное число итераций будет найдено оптимальное решение задачи (оптимальность выявится на 1-м этапе соответствующей итерации).

Исследование велось в предположении о невырожденности задачи. Если задача вырожденная, то от вырожденности можно освободиться при помощи ε-задачи, аналогично тому, как это делается в классической транспортной задаче (см. [2]).

Автор выражает глубокую благодарность С. С. Лебедеву за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. С. Лебедев. Конечный метод решения нелинейных задач транспортного типа. Экономика и матем. методы, 1965, т. I, вып. 1.
2. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. М., «Сов. радио», 1961.

Поступила в редакцию
5 VI 1967