ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ 1969 ТОМ V, вып. 2

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Д. Б. ЮДИН

(Москва)

1. Запись задач стохастического программирования в терминах функциональных пространств [1] позволяет использовать для качественного анализа и создания численных методов решения задачи бесконечномерные аналоги двойственных постановок. В [2] приведена общая схема формирования двойственной задачи для функциональных аналогов задач выпуклого и дробно-выпуклого программирования и доказан ряд утверждений, обобщающих некоторые результаты конечномерной теории двойственности. В [3] изложен геометрический принцип построения двойственной задачи. Имеются и другие бесконечномерные обобщения теории двойственности. Каждое из них может быть использовано для построения задачи, двойственной к стохастической, которая может быть представлена как выпуклая задача в функциональном пространстве. Проиллюстрируем эти соображения на примере задачи [4], представляющей частную постановку вида (2.1) — (2.3) из [1].

$$M(CX) \to \max, \tag{1}$$

$$M(AX) \leqslant b, \tag{2}$$

$$M(x_j^2) \leqslant d_j^2. \tag{3}$$

Будем называть задачу (1) — (3) существенно стохастической, если в каждом ее расширенном векторе условий $\{c_j, a_{1j}, \ldots, a_{mj}\}$ содержится по крайней мере одна случайная компонента и коэффициент линейной формы c_j не может быть получен как линейная комбинация составляющих j-го вектора условий с детерминированными неотрицательными коэффициентами.

Перепишем задачу (1) — (3) в терминах гильбертова пространства H^n [1]

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j, x_j) \to \sup, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}, x_j) \leqslant b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

$$\|x_j\| \leqslant d_j; \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Примем следующие допущения: (а) множество, определяемое условиями (5), (6), содержит внутреннюю точку (удовлетворяет условию Слейтера); (б) задача (4) — (6) существенно стохастическая, т. е.

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \neq 0; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

при любых $\lambda_i \geqslant 0$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

Условия (б), не имеющие смысла для детерминированных экстремальных задач, следует считать естественными для задач стохастического программирования. Они означают, что для каждого j случайные величины c_j и a_{ij} не являются функционально зависимыми.

2. Имеет место следующее утверждение [4].

Теорема. *Компоненты x_j^* решения задачи (4) — (6), для которой справедливы допущения (а) и (б), вычисляются из соотношений*

$$x_j^* = \frac{d_j \Delta_j^*}{\|\Delta_j^*\|}; \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где случайные величины $\Delta_j^* = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_{ij}$, а λ_i^*; $i = 1, 2, \ldots, m$, — составляющие детерминированного вектора $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, на котором достигается

$$\min_{\Lambda \geqslant 0} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{n} d_j \|\Delta_j\| \right\}. \tag{8}$$

Доказательство. Условия (а) и (б) позволяют использовать обоснованный в [2] принцип построения задачи, двойственной к задаче (4) — (6).

Функционал Лагранжа для задачи (4) — (6) имеет вид

$$F(X, \lambda, \mu) = \sum_{j=1}^{n} (c_j, x_j) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left\{ b_i - \sum_{j=1} a_{ij} x_j \right\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \mu_j \{ d_j^2 - (x_j, x_j) \} = \sum_{j=1}^{n} \left\{ c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij}, x_j \right\} -$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \mu_j (x_j, x_j) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j d_j^2. \tag{9}$$

Введем функцию $\Psi(\lambda, \mu) = \sup\limits_{X} F(X, \lambda, \mu)$.

Из соотношения (9) видно, что верхняя грань функционала Лагранжа достигается при

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 2\mu_j x_j; \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Поэтому

$$\Psi(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j d_j^2 + \sup_{X} \sum_{j=1}^{n} \mu_j (x_j, x_j).$$

В силу допущения (б) $\mu_j \neq 0$ при любых $\lambda_i \geqslant 0$. Учитывая (10), получаем

$$\Psi(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j d_j^2 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\mu_j} \left\| c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \right\|^2.$$

В соответствии с утверждениями [2] задача, двойственная к задаче (4) — (6), записывается в виде

$$\begin{gathered}\Psi(\lambda, \mu) \to \inf, \\ \lambda_i \geqslant 0,\ \mu_j \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{11}$$

Поскольку $\mu_j \neq 0$, можно исключить μ из соотношения (11), используя уравнения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mu_j} = d_j^2 - \frac{1}{4\mu_j^2} \left\| c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \right\|^2 = 0,$$

откуда

$$\mu_j = \frac{1}{2d_j} \left\| c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \right\|; \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

и

$$\Psi(\lambda) = \inf_{\mu > 0} \Psi(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{n} d_j \left\| c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \right\|.$$

Таким образом, двойственная задача к задаче стохастического программирования (4) — (6) представляет собой следующую простую задачу детерминированного выпуклого программирования

$$\inf_{\lambda \geqslant 0} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i + \sum_{j=1}^{n} d_j \left\| c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \right\| \right\}. \tag{13}$$

Решение задачи (13) достигается без труда, например, методом покоординатной минимизации Гаусса — Зайделя.

Из соотношений (10) и (12) получаем явные выражения для компонент оптимального плана исходной задачи (4) — (6) стохастического программирования

$$x_j^* = \frac{d_j \left(c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_{ij} \right)}{\left\| c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_{ij} \right\|} = \frac{d_j \Delta_j^*}{\|\Delta_j^*\|},$$

где $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ — оптимальный план двойственной задачи (13).

Теорема доказана.

Аналогичным образом можно построить двойственные задачи для ряда других моделей выпуклого стохастического программирования и использовать их для решения исходной задачи. Однако в более сложных случаях методы численного решения задач стохастического программирования оказываются более громоздкими.

3. Решим в соответствии с рекомендациями настоящего параграфа примеры, приведенные в [1]. Примеры из [1] требуют минимизации целевой функции. Формулы настоящего параграфа выписаны для задачи максимизации. Чтобы воспользоваться ими, перепишем условия примера 1 в следующем виде.

Пример 1.

$$\tilde{L} = -L = M\{\tilde{a}_{01}x_1 + \tilde{a}_{02}x_2\} \to \max,$$
$$M\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2\} \leqslant b_1,$$
$$M\{x_1^2\} \leqslant d_1; \quad M\{x_2^2\} \leqslant d_2.$$

Здесь $\tilde{a}_{01} = -a_{01}$; $\tilde{a}_{02} = -a_{02}$.

Имеем

$$\Delta_j = \tilde{a}_{0j} - \lambda_1 a_{1j} = -a_{0j} - \lambda_1 a_{1j},$$
$$\|\Delta_j\|^2 = (\tilde{a}_{0j} - \lambda_1 a_{1j},\ \tilde{a}_{0j} - \lambda_1 a_{1j}) = (a_{0j}, a_{0j}) + 2\lambda_1(a_{0j}, a_{1j}) + \lambda_1^2(a_{1j}, a_{1j}),$$
$$\|\Delta_1\|^2 = 5 + 4{,}5\lambda_1 + 2\lambda_1^2; \quad \|\Delta_2\|^2 = 10 + 13{,}5\lambda_1 + 5\lambda_1^2.$$

Целевая функция двойственной задачи

$$\Psi(\lambda_1) = \lambda_1 + \sqrt{5 + 4{,}5\lambda_1 + 2\lambda_1^2} + \sqrt{10 + 13{,}5\lambda_1 + 5\lambda_1^2}$$

при неотрицательных λ_1 монотонно возрастает. Следовательно, $\min\limits_{\lambda_1 \geqslant 0} \Psi(\lambda_1)$ достигается при $\lambda_1 = 0$. Поэтому

$$\Delta_1^* = \sqrt{5}, \quad \Delta_2^* = \sqrt{10}, \quad x_j^* = -d_j a_{0j} / \Delta_j^*,$$

откуда $x_j^* = -a_{01}/\sqrt{5} = -0{,}4472 a_{01}$, $\quad x_2^* = -0{,}3162 a_{02}$,

$$L^* = M\{a_{01}x_1^* + a_{02}x_2^*\} = -\frac{\|a_{01}\|^2}{\sqrt{5}} - \frac{\|a_{02}\|^2}{\sqrt{10}} = -\sqrt{5} - \sqrt{10} = -5{,}398.$$

Пример 2. $\tilde{L} = -L = M\{\tilde{a}_{01}x_1 + \tilde{a}_{02}x_2\} \to max,$

$$M\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2\} \leqslant b_1,$$
$$M\{a_{21}x_1 + a_{22}x_2\} \leqslant b_2,$$
$$M\{x_1^2\} \leqslant d_1, \quad M\{x_2^2\} \leqslant d_2.$$

Имеем

$$\Delta_j = \tilde{a}_{0j} - (\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j}) = -(a_{0j} + \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j}),$$
$$\|\Delta_1\|^2 = 5 + 4{,}5\lambda_1 - 15{,}5\lambda_2 + 2\lambda_1^2 - 7{,}5\lambda_1\lambda_2 + 17\lambda_2^2,$$
$$\|\Delta_2\|^2 = 10 + 13{,}5\lambda_1 + 7{,}5\lambda_2 + 5\lambda_1^2 + 5\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2.$$

Целевая функция двойственной задачи имеет вид

$$\Psi(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \|\Delta_1\| + \|\Delta_2\|.$$

Посредством покоординатной минимизации находим, что $\min\limits_{\lambda \geqslant 0} \Psi(\lambda)$ достигается при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0{,}267$. При этом $\|\Delta_1\| = 1{,}440$, $\|\Delta_2\| = 3{,}485$.

По формулам (7) получаем

$$x_1^* = -0{,}694\, a_{01} - 0{,}185\, a_{21}, \qquad x_2^* = -0{,}287\, a_{02} - 0{,}077\, a_{22}.$$

Минимальное значение показателя качества решения задачи на множестве ее планов равно $L^* = -5{,}192$.

4. В заключение приведем следующее замечание. Задаче стохастического программирования (4)—(6) соответствует детерминированная задача линейного программирования вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{15}$$

$$-d_j \leqslant x_j \leqslant d_j; \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Решение этой задачи не может быть сведено к исследованию модели вида (8) и соотношениям (7), поскольку доказанная выше теорема справедлива только при условии существенной стохастичности задачи. Решение простой задачи (8) выпуклого программирования, как правило, менее трудоемкая работа, чем решение задачи (14) — (16) линейного программирования. Таким образом, в приведенной постановке достижение экстремума в условиях неполной информации оказалось более простой задачей, чем составление оптимального плана при полной информации о параметрах целевой функции и ограничений.

Этот на первый взгляд несколько неожиданный вывод представляется тем не менее естественным. Чем меньше информации об условиях реализации плана, тем меньший эффект может быть достигнут при планировании. Поэтому следует считать интуитивно оправданной возможность рациональной постановки задачи оптимального планирования, которой соответствуют тем более простые подходы к решению, чем меньше информации оказывается в распоряжении планирующего органа. То же относится к задачам управления и проектирования. Упрощение структуры схемы обмена информацией и алгоритмов — немаловажный фактор для внедрения математических методов в практику планирования, управления и проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Б. Юдин. Новые подходы к стохастическому программированию, Экономика и матем. методы, 1968, т. IV, вып. 6.
2. Е. Г. Гольштейн. Двойственные задачи выпуклого и дробно-выпуклого программирования в функциональных пространствах. Докл. АН СССР, 1967, 172, № 5.
3. Г. Ш. Рубинштейн. Двойственные экстремальные задачи. Докл. АН СССР, 1963, 152, № 3.
4. Д. Б. Юдин. Об одном классе задач стохастического программирования. Докл. АН СССР, 1967, 177, № 6.

Поступила в редакцию
24 V 1968