ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 2, с. 51–66

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ КРЕДИТА

© 2012 г. А.В. Жевняк

(Рязань)

С помощью новой техники дисконтирования на основе специального класса функций (дисконт-функций) построены математические модели распространенных кредитных схем, проведен сравнительный анализ их доходности/затратности для кредитора/заемщика. Дан критический анализ действующей методики ЦБ РФ определения эффективной процентной ставки кредита как меры его доходности для кредитора или затратности для заемщика. Показана возможность применения дисконт-функций для анализа доходности облигаций.

Ключевые слова: расчет, кредит, кредитор, заемщик, доходность, эффективная процентная ставка, ЭПС, IRR, реинвестирование, дисконтирование.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРЕДИТА

Пусть S – номинальная сумма займа; $\{R_j, j = 1,\ldots, n\}$ – денежный поток обслуживания кредита (в уплату основного долга и начисленных процентов), поступающий кредитору от заемщика; R_j – член потока, выплачиваемый в конце расчетного периода j (постнумерандо); n – срок кредита, исчисляемый числом расчетных периодов (например, дней, недель, месяцев, кварталов, лет); $\mathbb{R}_n = \sum_{j=1}^{n} R_j$. При кредите каждый член потока $R_j(S, \delta_m, n)$ является определенной функцией суммы займа S, процентной ставки расчетного периода δ_m, срока кредита n и предопределяется выбранной схемой обслуживания займа. Примем, что $\delta_m = \delta/m$, где δ – номинальная (годовая) процентная ставка кредита, m – число платежей обслуживания в году, а в качестве дополнительных выплат будем учитывать только единовременный комиссионный сбор в размере[1] αS, взимаемый в начале первого расчетного периода одновременно с предоставлением займа. (Следует заметить, что все дальнейшие выкладки могут быть адаптированы и к случаю распределенных во времени комиссионных сборов, когда ставка комиссии $\alpha = \alpha(j) = \alpha_j$.)

На практике наибольшее распространение получили четыре вида кредита, отличающиеся по схеме обслуживания долга:

– кредит с равномерным гашением основного долга и начислением процентов на остаток ссудной задолженности, который называют также кредитом с амортизацией долга, кредитом с дифференцированными платежами или классическим (для краткости мы будем именовать его *ординарным* кредитом);

– кредит с регулярной уплатой процентов, начисляемых на сумму основного долга, и единовременным погашением основного долга в конце срока (по аналогии с купонной облигацией такой кредит мы будем называть *купонным*);

[1] Единовременный комиссионный сбор практикуется банками в основном для физических лиц и частично для малого и среднего бизнеса. При кредитовании крупных корпоративных клиентов эта операция применяется достаточно редко. Вместо комиссии для крупных корпоративных клиентов используются другие инструменты – требование наличия неснижаемого остатка на расчетном счете, активные обороты по счету, причем часто в объеме, соизмеримом с суммой займа. Такие обременения главным образом имеют целью снижение кредитного риска (защита от дефолта заемщика).

– кредит с единовременной уплатой основного долга и начисленных процентов в конце срока (*шаровый* кредит);

– кредит с одинаковыми по величине платежами обслуживания в виде постоянной ренты (*аннуитетный* кредит).

Далее все показатели рассматриваемых конкретных кредитов будем нумеровать (помещая соответствующий номер в верхнем индексе) в том порядке, в котором они перечислены выше.

Обычно в потоке платежей обслуживания кредита, поступающих со стороны заемщика в адрес кредитора, выделяются две составляющие, направляемые соответственно на погашение основного долга и в уплату процентов за пользование займом $\{G_j(S, \delta_m, n), j = 1,\ldots, n\}$ и $\{P_j(S, \delta_m, n), j = 1,\ldots, n\}$ соответственно. Эти потоки взаимосвязаны (например, в случае, когда уменьшение текущей ссудной задолженности за счет частичного погашения основного долга снижает и сумму начисляемых в следующем периоде процентов). Конкретный вид функций $G_j(S, \delta_m, n)$ и $P_j(S, \delta_m, n)$ зависит от принятой схемы обслуживания кредита, причем во всех случаях должно выполняться условие возвратности займа $\sum_{j=1}^{n} G_j(S, \delta_m, n) = S$.

Для ординарного кредита при $j = 1,\ldots, n$ с учетом $P_j = D_{j-1}\delta_m$, $D_j = S(1 - j/n)$ получим

$$G_j^{(1)} = S/n, \quad P_j^{(1)} = S(n+1-j)\delta_m/n, \quad R_j^{(1)} = S[1+(n+1-j)\delta_m]/n,$$

где D_j – ссудная задолженность (точнее, остаток основного долга) в конце расчетного периода j;

для купонного –

$$G_j^{(2)} = \begin{cases} 0, & j = 1,\ldots, n-1; \\ S, & j = n; \end{cases} \quad P_j^{(2)} = S\delta_m, \quad j = 1,\ldots, n; \quad R_j^{(2)} = \begin{cases} S\delta_m, & j = 1,\ldots, n-1; \\ S + S\delta_m, & j = n, \end{cases}$$

для шарового –

$$G_j^{(3)} = \begin{cases} 0, & j = 1,\ldots, n-1; \\ S, & j = n; \end{cases} \quad P_j^{(3)} = \begin{cases} 0, & j = 1,\ldots, n-1; \\ S[(1+\delta_m)^n - 1], & j = n; \end{cases}$$

$$R_j^{(3)} = \begin{cases} 0, & j = 1,\ldots, n-1; \\ S(1+\delta_m)^n, & j = n. \end{cases}$$

для аннуитетного –

$$G_j^{(4)} = (R - S\delta_m)(1+\delta_m)^{j-1}, \quad P_j^{(4)} = R_j^{(4)} - G_j^{(4)} = R[1-(1+\delta_m)^{j-1}] + S\delta_m(1+\delta_m)^{j-1},$$

$$R_j^{(4)} = R = S/\varphi_0(\delta_m, n),$$

где $\varphi_0(\delta_m, n) = \sum_{j=1}^{n} 1/(1+\delta_m)^j = ((1+\delta_m)^n - 1)/(\delta_m(1+\delta_m)^n)$ – дисконт-функция нулевой степени или коэффициент приведения единичной постоянной ренты.

Степенные дисконт-функции $\varphi_k(\delta_m, n) = \sum_{j=1}^{n} j^k/(1+\delta_m)^j$ степени k и порядка n введены в научный оборот в (Жевняк, 2010, с. 11–107). Они являются обобщением результатов Я. Бернулли (Jacob Bernoulli) в классической задаче о вычислении суммы одинаковых степеней последовательных натуральных чисел с натуральными же показателями и обладают рядом важных свойств, позволяющих существенно упростить аналитическое исследование финансовых операций. Часть этих свойств, необходимая для настоящей статьи, описана в Приложении, где также проведено сравнение кредитов по дисконтированной сумме процентных платежей и дисконтированной сумме платежей обслуживания.

2. ИНВЕСТИЦИОННАЯ ЭФФЕКТИВНАЯ СТАВКА

Доходность финансовой операции является ее важнейшей характеристикой. В применении к кредиту можно говорить о его доходности для кредитора и затратности для заемщика. Вычислив современную стоимость потока платежей обслуживания кредита $\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} R_j/(1+\varepsilon)^j$, можно найти сумму полных (с учетом взимаемой кредитором комиссии) дисконтированных или наращенных платежей заемщика в абсолютном и удельном выражении:

$$\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon} = \alpha S + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}, \quad \widehat{\widehat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon} = \widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon} S^{-1} = \alpha + \widehat{\widehat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}, \quad \widehat{\widehat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} = \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} S^{-1},$$
$$\mathbb{Z}_{n\varepsilon} = \widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}(1+\varepsilon)^n = [\alpha S + \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}](1+\varepsilon)^n, \quad \overline{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon} = \mathbb{Z}_{n\varepsilon} S^{-1} = \alpha(1+\varepsilon)^n + \widehat{\widehat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}(1+\varepsilon)^n, \tag{1}$$

где $\widehat{\widehat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon} = \widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}/S$ и $\overline{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon} = \mathbb{Z}_{n\varepsilon}/S$ – удельные (на единицу номинальной суммы займа) полные дисконтированные и наращенные платежи обслуживания кредита соответственно; $\overline{R}_j = R_j/S$ – текущие удельные платежи обслуживания кредита; ε – ставка дисконта (реинвестирования). По аналогии с инвестиционным анализом величина $\widehat{\widehat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}$ может быть названа индексом рентабельности кредита (PI, profitability index). Вычислив $\widehat{\widehat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}$ можно будет установить некоторую шкалу измерения доходности/затратности кредита для кредитора и заемщика соответственно. Еще одну шкалу доходности можно получить через удорожание кредита:

$$\widehat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon} = (\widehat{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon} - S)/S = \widehat{\widehat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon} - 1 = \widehat{\widehat{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon} + \alpha - 1.$$

Приведенные в Приложении формулы для современной стоимости суммы платежей обслуживания $\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ в различных кредитных схемах позволяют вычислить по формуле (1) доходность кредита для кредитора или затратность кредита для заемщика по современной $\widehat{\widehat{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}$ или наращенной $\overline{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}$ стоимости, а также удорожание $\widehat{\mathbb{U}}_{n\varepsilon}$. При этом возникает проблема выбора ставки дисконта (ставки реинвестирования текущих платежей), причем она может быть разной для кредитора и заемщика.

Для оценки доходности кредита могут применяться и другие подходы, приводящие к иным результатам, например эффективную процентную ставку (ЭПС). Для российских банков методика ее вычисления установлена ЦБ РФ в Положении № 254-П "О порядке формирования кредитными организациями резервов на возможные потери по ссудам, по ссудной и приравненной к ней задолженности", которая разъяснена в Письме ЦБ 175-Т от 26 декабря 2006 г. Согласно требованию ЦБ эффективная ставка должна учитывать все платежи, которые производит заемщик в процессе обслуживания кредита, и величину этой ставки, вычисленную по установленной методике, банк обязан с 1 июля 2007 г. сообщать заемщику. Банки, отказавшиеся от вычисления ЭПС, должны выделять в своем кредитном портфеле определенные группы кредитов и создавать по каждой из них отдельный резерв. По замыслу регулятора информация о величине ЭПС позволит потенциальному заемщику сравнивать предложения различных банков[2], выбирая наиболее выгодные, и в конечном счете обострить конкуренцию среди кредиторов. Первый опыт самостоятельного освоения заемщиками банковской методики расчета ЭПС свидетельствует о весьма серьезных недоразумениях по поводу получаемых результатов (см., например, (Федоров, 2008, с. 79–81), а также многочисленные публикации в Интернете по вопросам личных финансов). Не в лучшем положении по толкованию результата вычисления эффективной ставки и корпоративные заемщики, хотя само вычисление ЭПС здесь и не должно вызывать особых проблем.

[2] Следует отметить, что банки предоставляют заемщику информацию о величине ЭПС вместе с подписанием кредитного договора, когда заемщику уже поздно искать другого кредитора (формально он, конечно, может и расторгнуть договор, найдя в короткое время более выгодное для себя предложение, но на практике это сделать весьма непросто). Однако просвещенный заемщик сможет самостоятельно вычислить ЭПС по методике ЦБ еще до оформления сделки. Хочется верить, что со временем число таких соискателей займа будет расти, особенно в случаях, когда речь идет о значительных суммах и сроках заимствования (например, для строительства жилья по ипотеке).

Согласно методике ЦБ РФ, эффективная процентная ставка кредита ЭПС кредита r определяется из уравнения

$$(1-\alpha)S=\sum_{j=1}^{n}\frac{R_j}{(1+r)^j}, \tag{2}$$

где $\widehat{\mathbb{R}}_{nr}=\sum_{j=1}^{n}R_j/(1+r)^j$ – современная стоимость потока платежей обслуживания $\{R_j, j=1,\ldots,n\}$ при ставке дисконта r. Из (2) при $0<\alpha<1$ с учетом основного свойства кредита[3]

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{R_j(S,\delta_m,n)}{(1+\delta_m)^j}=S \tag{3}$$

вытекает $\widehat{\mathbb{R}}_{nr}>S=\sum_{j=1}^{n}R_j(S,\delta_m,n)/(1+\delta_m)^j$, откуда в силу монотонного убывания функции $\widehat{\mathbb{R}}_{nr}$ при возрастании r следует $r>\delta_m$. Но при отсутствии комиссии ($\alpha=0$) из (3) и (2) вытекает, что $r=\delta_m$. Уравнение (2) и соответствующая методология определения ЭПС кредита заимствованы из инструментария, сформировавшегося при анализе инвестиций, где аналогичным образом определяется внутренняя норма доходности *IRR* (internal rate of return) инвестиционного проекта. В инвестиционном анализе, как известно, внутренняя норма доходности сопоставляется с доступной для инвестора ставкой r_0 размещения свободных денежных средств (с приемлемым уровнем риска) и в случае $IRR>r_0$ делается суждение о возможности инвестирования в данный проект (как правило, это только предварительное суждение, после чего методами инвестиционного анализа проводится более полное исследование проекта). Таким образом, в инвестиционном анализе *IRR* является барьерным значением доходности проекта для инвестора, который выбирает объект инвестирования из числа ему известных и доступных.

Уравнение (2) можно записать в виде, отражающем процесс реинвестирования

$$S(1+r)^n=\alpha S(1+r)^n+\sum_{j=1}^{n}R_j(1+r)^{n-j} \tag{4}$$

и выражающем равенство наращенных сумм в проекте сравнения с единственным платежом S, с одной стороны, и всех платежей обслуживания реального займа, включая уплату комиссии, с другой стороны. Нахождение r из уравнений (2) или (4) – это определение ставки дисконта, обеспечивающей эквивалентность реального кредитного проекта с потоком обслуживания $\{R_j, j=1,\ldots,n\}$ и альтернативного финансового проекта (проекта сравнения), в качестве которого принимается либо депозит с единовременным взносом S, либо кредит на сумму S с уплатой основного долга и начисленных процентов в конце срока кредита (шаровый кредит).

Будем считать параметр r в правой части уравнения (4) ставкой реинвестирования платежей обслуживания реального кредита, которое регулярно (по мере поступления платежей) производит кредитор, тогда как тот же параметр r в левой части (4) выражает ставку наращения альтернативного проекта сравнения. Вообще говоря, можно априори не связывать себя предположением о равенстве значений параметра r в левой и правой частях уравнения (4). Резонно считать, что ставка реинвестирования платежей обслуживания реального кредита есть рыночная ставка размещения свободных денежных средств, т.е. является экзогенным параметром ε. Таким образом, вместо балансового уравнения (4) можно записать

$$S(1+r)^n=(1+\varepsilon)^n\left[\alpha S+\sum_{j=1}^{n}R_j/(1+\varepsilon)^j\right] \tag{5}$$

[3] Уравнение (3) в математической форме выражает условие замыкания “контура кредита” (Четыркин, 2002, с. 211–212).

и найти ЭПС как функцию ставки размещения

$$(1+\varepsilon)[\alpha+\widehat{\overline{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}]^{1/n}-1=r(\varepsilon)=(1+\varepsilon)[\alpha+\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}/S]^{1/n}-1=(1+\varepsilon)[\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}]^{1/n}-1=[\overline{\mathbb{Z}}_{n\varepsilon}]^{1/n}-1. \quad (6)$$

Далее мы будем называть $r(\varepsilon)$, вычисляемое по (6), ***инвестиционной ЭПС***, а ее барьерное значение r, определяемое из уравнения (2), – *внутренней нормой доходности кредита* (*IRRC*). При этом $r(\varepsilon)|_{\varepsilon=r}=r$, т.е. *IRRC* есть предельное значение инвестиционной ЭПС, если реинвестирование в реальном проекте и проекте сравнения производится по одной и той же ставке.

Используя формулы современной стоимости платежей обслуживания займа для всех рассматриваемых нами видов кредита ($\widehat{\mathbb{R}}^{(1)}_{n\varepsilon}, \widehat{\mathbb{R}}^{(2)}_{n\varepsilon}, \widehat{\mathbb{R}}^{(3)}_{n\varepsilon}, \widehat{\mathbb{R}}^{(4)}_{n\varepsilon}$) (см. Приложение), можно записать:

$$\begin{aligned} r^{(1)}(\varepsilon)&=(1+\varepsilon)\{\alpha+[(\varepsilon-\delta_m)\varphi_0(\varepsilon,n)+n\delta_m]/n\varepsilon\}^{1/n}-1,\\ r^{(2)}(\varepsilon)&=(1+\varepsilon)[1+\alpha+(\delta_m-\varepsilon)\varphi_0(\varepsilon,n)]^{1/n}-1,\\ r^{(3)}(\varepsilon)&=(1+\varepsilon)[\alpha+(1+\delta_m)^n/(1+\varepsilon)^n]^{1/n}-1,\\ r^{(4)}(\varepsilon)&=(1+\varepsilon)[\alpha+\varphi_0(\varepsilon,n)/\varphi_0(\delta_m,n)]^{1/n}-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Инвестиционная ЭПС $r(\varepsilon)$ растет с увеличением ε, поскольку с учетом $\dfrac{d\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}}{d\varepsilon}=$ $=-\dfrac{1}{1+\varepsilon}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{jR_j}{(1+\varepsilon)^j}$ справедливо

$$\frac{\partial r(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=[\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}]^{1/n}+\frac{1+\varepsilon}{n}[\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}]^{1/n-1}\frac{\partial\widehat{\overline{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}}{\partial\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{n}[\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}]^{1/n}\left\{n-\frac{\widehat{\overline{\mathbb{R}}}_{n\varepsilon}}{\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}}\frac{1}{\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}}\sum_{j=1}^{n}\frac{j\overline{R}_j}{(1+\varepsilon)^j}\right\}>\frac{1}{n}[\widehat{\overline{\mathbb{Z}}}_{n\varepsilon}]^{1/n}[n-\mathfrak{D}_n]\geq 0,$$

где $\mathfrak{D}_n=\dfrac{1}{\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{jR_j}{(1+\varepsilon)^j}\leq n$ – *дюрация Маколея* для денежного потока $\{R_j, j=1,\dots,n\}$. Поэтому $dr(\varepsilon)/d\varepsilon>0$ и для инвестиционной ЭПС справедливо $r(\varepsilon)<r$ при $0\leq\varepsilon<r$.

При наличии единовременной комиссии по ставке $\alpha<1$ и $\varepsilon<r$ современная стоимость полного потока платежей обслуживания кредита $\alpha S+\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$, получаемых кредитором, будет больше, чем потенциально возможная сумма дохода от размещения на депозите суммы в размере S, т.е. кредит даст ему больший доход, чем размещение средств на депозите. Но при $\varepsilon>r$, наоборот, кредитору выгоднее выступить чистым инвестором, размещая первичный кредитный ресурс S на депозите[4] или иным эквивалентным образом. При $\varepsilon=r$ обе стратегии дадут одинаковый эффект. То же самое справедливо и в отношении наращенных сумм. Тогда наращенный за счет постоянного реинвестирования поступающих платежей на множестве всех заемщиков ссудный капитал кредитора $\alpha S(1+\varepsilon)^n+\mathbb{R}_{n\varepsilon}$ должен сопоставляться с наращенной на депозите с постоянной капитализацией процентов суммой $S(1+\varepsilon)^n$. *Найденное значение r внутренней нормы доходности кредита (IRRC) задает критерий для выбора стратегии кредитора.*

Заемщик также может выступать в роли инвестора, например, путем размещения средств займа на депозите или приобретения на них некоего имущества, в том числе ценных бумаг, которое будет сдаваться в коммерческую аренду, приносить дивиденды или доход по облигациям. При $\varepsilon<r$ современная стоимость полного потока платежей обслуживания кредита $\alpha S+\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ будет больше, чем сумма инвестиций S, т.е. обслуживание кредита принесет заемщику-инвестору больше затрат, чем он получит доходов от инвестиций. При $\varepsilon>r$, наоборот, доходы заемщика-

[4] Если рыночная ставка размещения $\varepsilon_j=\varepsilon(j)$ меняется во времени, то кредитор может выбрать другую стратегию, переходя к стратегии инвестора (при $\varepsilon_j>r=IRRC$) или возвращаясь к стратегии кредитора (при $\varepsilon_j<r=IRRC$).

инвестора от инвестирования будут больше, чем затраты на обслуживание займа на величину $S - \alpha S - \mathbb{R}_{n\varepsilon} > 0$ (если инвестирование заемных средств остается только гипотетическим вариантом, то это упущенная выгода). Однако если для кредитора инвестирование – это реальная альтернатива кредитованию, то для заемщика свободное инвестирование заемных средств во многих случаях недоступно или малоинтересно[5]. Так будет, например, в случае, когда заемщик средства займа изначально планирует использовать не для получения инвестиционного дохода, а для достижения других, более важных для него целей (в том числе для решения социальных задач, например, для приобретения жилья), что и предопределяет его стратегию. Такому заемщику более важно знать не *IRRC* как критерий выбора стратегии, а оценивать затратность того или иного варианта кредитования.

Как уже было отмечено, найденное по уравнению (2) значение *IRRC* – это предельная доходность кредита для кредитора (в работах (Кузнецов, 2010, глава 6; Четыркин, 2002, с. 209) она именуется полной доходностью кредита), достигаемая при реинвестировании текущих платежей на множестве всех заемщиков. Но одновременно это и предельная затратность кредита на множестве всех заемщиков, имеющих потенциальную возможность реинвестирования на финансовом рынке, чего может не иметь отдельно взятый конкретный заемщик. Поэтому *IRRC – это только общая характеристика кредитного проекта (критерием для выбора стратегии кредитора и заемщика), но никак не мера доходности/затратности кредита для конкретного кредитора и заемщика.* Следовательно, расчет по методике ЦБ РФ дает величину *IRRC*, выражающую предельную доходность кредита для кредитора, которая является частным значением ЭПС (при $\varepsilon = r$) и существенно завышенной для конкретного заемщика оценкой затратности кредита. Это обстоятельство вводит в заблуждение заемщиков, что отражено в многочисленных публикациях в Интернете и в книге (Федоров, 2008, с. 79–81), рассчитанной на широкий круг читателей.

Отметим, что в общем смысле под шкалой измерения доходности/затратности кредита надо понимать числовую прямую (или интервал на этой прямой), связанную взаимно однозначным непрерывным отображением с суммой платежей обслуживания кредита. Определенные выше шкала удельных доходов/затрат и шкала удорожания – простейшие из возможных. Однако применительно именно к кредиту более удобно и привычно измерять доходность/затратность кредита в виде процентной ставки. Выражения (6), (7) задают такую шкалу сопоставлением суммарных платежей обслуживания конкретного кредита, с одной стороны, и, с другой стороны, шарового кредита (или депозита с постоянной капитализацией процентов), используемого в качестве проекта сравнения. Но здесь так же, как и при вычислении доходности/затратности кредита по формуле (1), возникает проблема выбора расчетной ставки реинвестирования ε. Очевидно, при $\varepsilon \neq \delta_m$ (т.е. $0 \le \varepsilon < \delta_m$ или $\varepsilon > \delta_m$) любой выбор значения ставки реинвестирования ε задает свою шкалу доходности/затратности кредита $r(\varepsilon)$. Но при $\varepsilon = \delta_m$, согласно (6), (7), справедливо

$$r(\delta_m) = (1 + \delta_m)(1 + \alpha)^{1/n} - 1, \tag{8}$$

и инвестиционная ЭПС не зависит от схемы обслуживания кредита. По существу, значение $\varepsilon = \delta_m$ задает точку Фишера для совокупности кредитных проектов, при прохождении которой меняется предпочтительность выбора той или иной кредитной схемы для кредитора и заемщика.

Таким образом, для кредитора, занимающегося только кредитной деятельностью с реинвестированием текущих поступлений от заемщика по ставке первоначального кредитования δ_m, все кредитные схемы дают одну и ту же доходность (8)[6].

При оценке затратности кредита значение ставки дисконта ε должно выбираться равным доступной для конкретного заемщика ставке размещения, например ставке доступного конкретному заемщику депозита, которая обычно меньше процентной ставки кредитования. Но при $0 \le \varepsilon < \delta_m$ в силу (3) выполняется $r^{(3)}(\varepsilon) > r^{(2)}(\varepsilon) > r^{(4)}(\varepsilon) > r^{(1)}(\varepsilon)$, т.е. для заемщика кредиты по убыванию затратности ранжируются в следующем порядке: шаровый, купонный, аннуитетный

[5] Собственно говоря, заемщик в большинстве случаев и не имеет права получать инвестиционный доход без согласования с кредитором, который может истолковать свободное рыночное инвестирование как нецелевое использование заемных средств.

[6] Данное утверждение справедливо при отсутствии частичного дефолта в платежах заемщика, т.е. когда все текущие платежи поступают в полном запланированном объеме. При наличии некоторых потерь в этих платежах даже при $\varepsilon = \delta_m$ доходность/затратность различных кредитных схем будет неодинаковой (Жевняк, 2010, глава 8).

и ординарный. Наиболее простые выражения инвестиционных ЭПС кредитов получаются из (6), (7) при отсутствии дисконтирования: $r(0) = [\alpha + \overline{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}(0)]^{1/n} - 1$. Тогда

$$\begin{gathered} r^{(1)}(0) = (\alpha + 1 + 0{,}5(n+1)\delta_m)^{1/n} - 1, \\ r^{(2)}(0) = [\alpha + 1 + n\delta_m]^{1/n} - 1, \\ r^{(3)}(0) = [\alpha + (1+\delta_m)^n]^{1/n} - 1, \\ r^{(4)}(0) = (\alpha + n/\varphi_0(\delta_m, n))^{1/n} - 1. \end{gathered} \tag{9}$$

Рассмотрим теперь случай, когда ставка дисконта превысит процентную ставку кредита ($\varepsilon > \delta_m$). Тогда в силу (П.5)–(П.7) шкала суммарных дисконтированных платежей обслуживания кредитов инвертируется, т.е. при $\varepsilon > \delta_m$ будет выполняться $r^{(1)}(\varepsilon) > r^{(4)}(\varepsilon) > r^{(2)}(\varepsilon) > r^{(3)}(\varepsilon)$. Так как $r > \delta_m$ всегда, то это будет, в частности, справедливо для внутренней нормы доходности кредитов (барьерных значений инвестиционной ЭПС):

$$IRRC1 > IRRC4 > IRRC2 > IRRC3,$$

которые определятся из нелинейного уравнения (2), принимающего для конкретных кредитов следующий вид:

$$\begin{gathered} \varphi_0(r^{(1)}, n)/n = 1 - \alpha r^{(1)}/(r^{(1)} - \delta_m), \\ r^{(2)} = \delta_m + \alpha/\varphi_0(r^{(2)}, n), \\ r^{(3)} = (1+\delta_m)(1-\alpha)^{-1/n} - 1, \\ \varphi_0(r^{(4)}, n) = (1-\alpha)\varphi_0(\delta_m, n). \end{gathered} \tag{10}$$

Следовательно, *ориентация на величину IRRC в сравнительном анализе затратности кредита для конкретного заемщика может полностью исказить результат ("с точностью до наоборот")*.

Пример 1. Пусть процентная ставка периода $\delta_m = 0{,}01$, что при $m = 12$, т.е. при ежемесячном обслуживании соответствует номинальной процентной ставке 12% годовых. Определить при ставке единовременной комиссии 3% ($\alpha = 0{,}03$) и сроке кредита $n = 60$ (5 лет) для ординарного, купонного, шарового и аннуитетного кредитов, выданных на одинаковых условиях, величину *IRRC*, а также значения инвестиционной ЭПС без учета дисконтирования ($\varepsilon = 0$), при реинвестировании по ставке первичного кредитования ($\varepsilon = \delta_m$) и по темпу инфляции 6% годовых ($\varepsilon = 0{,}005$).

IRRC кредитов вычисляются численными методами по уравнениям (10):

$$\begin{gathered} IRRC1 = r^{(1)} = 0{,}011224 > IRRC4 = r^{(4)} = 0{,}011125 > \\ > IRRC2 = r^{(2)} = 0{,}010680 > IRRC3 = r^{(3)} = 0{,}010513 \end{gathered}$$

(на рис. 1 отмечены маркером "пустой кружок"), что в пересчете на годовые проценты составит 13,47; 13,35; 12,82 и 12,62% соответственно.

При ставке реинвестирования, равной процентной ставке кредита по формуле (8), найдем ЭПС: $r^{(1)}(\delta_m) = r^{(2)}(\delta_m) = r^{(3)}(\delta_m) = r^{(4)}(\delta_m) = 0{,}010498$.

В отсутствие реинвестирования по формулам (9) получим:

$$r^{(3)}(0) = 0{,}010276 > r^{(2)}(0) = 0{,}008176 > r^{(4)}(0) = 0{,}005195 > r^{(1)}(0) = 0{,}004827,$$

что в пересчете составит соответственно 12,33; 9,81; 6,23 и 5,79% годовых.

При дисконтировании по темпу инфляции согласно (7) найдем:

$$\begin{gathered} r^{(3)}(0{,}005) = 0{,}010371 > r^{(2)}(0{,}005) = 0{,}009256 > r^{(4)}(0{,}005) = \\ = 0{,}007785 > r^{(1)}(0{,}005) = 0{,}007603, \end{gathered}$$

или 12,45; 11,11; 9,34 и 9,12% годовых.

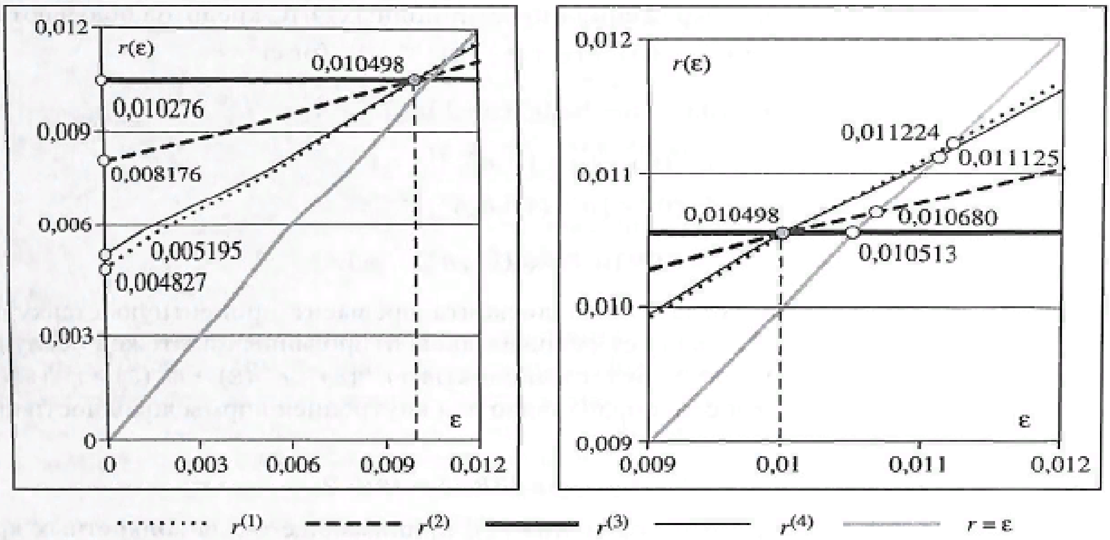

Рис. 1. Инвестиционная эффективная процентная ставка $r^{(k)}(\varepsilon)$ ординарного (1), купонного (2), шарового (3) и аннуитетного (4) кредитов при $\alpha = 0{,}03$, $\delta_m = 0{,}01$, $n = 60$.

По результатам расчета *IRRC* (барьерных значений инвестиционной ЭПС) наименее доходным для кредитора (затратным для заемщика) следовало бы признать шаровый кредит, а наиболее доходным для кредитора (затратным для заемщика) – ординарный. Но ставка реинвестирования $\varepsilon = IRRC$ недостижима для конкретного заемщика. По значениям ЭПС, вычисленным при $\varepsilon < \delta_m$ (и, в частности, при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 0{,}005$) кредиты ранжируются в обратном порядке: наименее доходным для кредитора (затратным для заемщика) будет ординарный кредит и далее по возрастанию затрат заемщика – аннуитетный, купонный и шаровый кредиты.

На рис. 2 приведена подробная графическая иллюстрация нахождения *IRRC* для аннуитетного кредита при тех же значениях параметров $\alpha = 0{,}03$, $\delta_m = 0{,}01$, $n = 60$. Заливкой отмечены области упущенной выгоды по современной (внизу) и наращенной стоимости (вверху), если рыночная ставка размещения ε будет больше барьерного значения ЭПС.

Как уже отмечалось, уравнение (2) составлено из условия равенства современных стоимостей платежей обслуживания R_j, $j = 1,\ldots, n$ реального кредита и принятого в качестве проекта сравнения виртуального шарового кредита с единственным платежом обслуживания в конце срока кредитования. Однако тот же результат справедлив при любом выборе проекта сравнения $R_j^{(0)}$, $j = 1,\ldots, n$ поскольку из уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{R_j^{(0)}(S_0, r, n)}{(1+r)^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{R_j(S, \delta_m, n)}{(1+r)^j}$$

с учетом $S_0 = (1-\alpha)S$ и основного свойства кредита (3) снова получим уравнение (2). Следовательно, при нахождении *IRRC* выбор проекта сравнения не играет никакой роли.

3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОЦЕНКИ ВНУТРЕННЕЙ НОРМЫ ДОХОДНОСТИ КРЕДИТА

Применяя нижнюю и верхнюю оценки (П.1) Д-функции нулевой степени, из (10) найдем приближенные оценки *IRRC* ординарного кредита:

$$r_H^{(1)} = \frac{\delta_m}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)n} < r^{(1)} < \frac{\delta_m}{1-\alpha} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha)(n+1)} = r_B^{(1)}.$$

При малых сроках n и относительно низких процентных ставках δ_m нижняя оценка $r^{(1)}$ может быть улучшена до $r^{(1)} > r_{H'}^{(1)} = \delta_m + 2\alpha/(n+1)$. Анализ, проведенный в (Жевняк, 2010, глава 12),

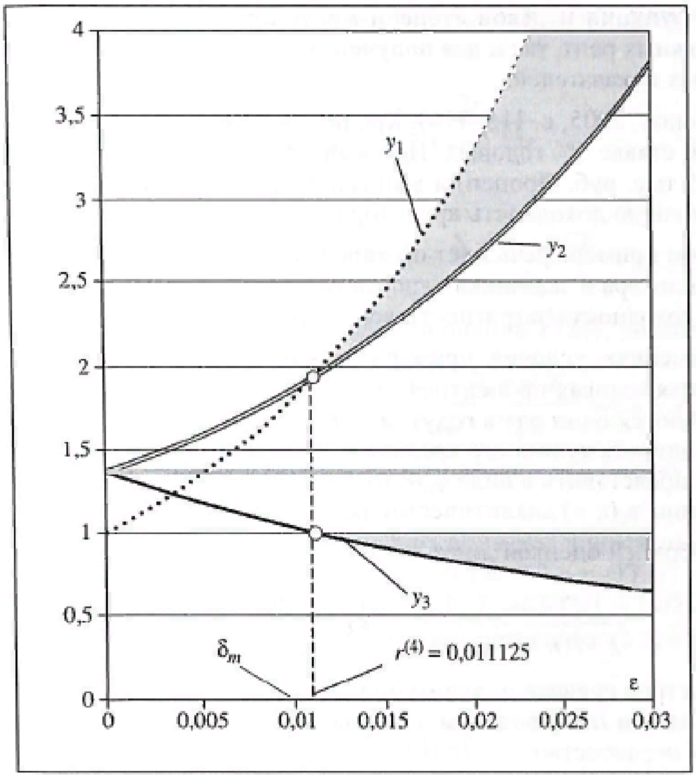

Рис. 2. Инвестиционная ЭПС аннуитетного кредита ($y_1 = (1+\varepsilon)^n$; $y_2 = [\alpha + \widehat{\widehat{\mathbb{R}}}{}_n^{(4)}](1+\varepsilon)^n$; $y_3 = \alpha + \widehat{\widehat{\mathbb{R}}}{}_n^{(4)}$).

показал, что в диапазоне изменения параметров кредита $n \le 120$; $\delta_m \le 0{,}02$; $\alpha \le 0{,}05$ верхняя оценка r_B имеет малую относительную погрешность $\eta = (r_B - r)r^{-1}$, которая локализуется в пределах $0 < \eta < 1{,}6\%$, хотя эта погрешность и возрастает с ростом ставки комиссии. Относительная погрешность нижних оценок r_{H^*} и r_H достигает (по модулю) значительно бо́льших значений: r_{H^*} принимает минимальное значение 3,5% при $n \approx 24$ и увеличивается при $n \to 1$ и $n \to \infty$ (т.е. как при росте, так при убывании n); r_H имеет максимум 30% при $n \approx 12$ и уменьшается до нуля при $n \to 1$ и при $n \to \infty$. Но они дополняют друг друга и совместно могут дать приближенную оценку решения уравнения (2) с точностью до 5% в указанном диапазоне параметров кредита.

Используя оценки (П.1) Д-функции нулевой степени, получим приближенные оценки *IRRC:*

– для купонного кредита

$$r_H^{(2)} = \frac{2(\alpha + n\delta_m)}{2n - \alpha(n+1)} < r^{(2)} < \frac{\delta_m}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{n(1-\alpha)} = r_B^{(2)};$$

в диапазоне изменения параметров кредита $n \le 120$; $\delta_m \le 0{,}02$; $\alpha \le 0{,}05$ относительная погрешность нижней оценки не превышает 1% (по модулю), а верхней оценки – 2,5%;

– для аннуитетного кредита

$$r_H^{(4)} = \frac{n - (1-\alpha)\varphi_0(\delta_m, n)}{n(1-\alpha)\varphi_0(\delta_m, n)} < r^{(4)} < 2\,\frac{n - (1-\alpha)\varphi_0(\delta_m, n)}{(n+1)(1-\alpha)\varphi_0(\delta_m, n)} = r_B^{(4)}.$$

Здесь, при том же диапазоне изменения параметров кредита, относительная погрешность нижней оценки решения уравнения (10) достигает 48% (по модулю) при $12 < n < 30$, а верхней оценки – 38% при $n \approx 120$. Такие оценки практически нельзя использовать.

Оценки (П.1) Д-функции нулевой степени могут применяться как для приближенных численных расчетов сложных рент, так и для получения упрощенных аналитических выражений тех или иных финансовых показателей.

Пример 2 (Кузнецов, 2005, с. 115–116). Кредит на сумму 100 тыс. руб. выдан на два года по сложной процентной ставке 8% годовых. При выдаче ссуды кредитором были удержаны комиссионные в размере 5 тыс. руб. Проценты выплачиваются раз в году, а основной долг – в конце срока. Определить полную доходность кредитора.

Фактически в этом примере речь идет об определении *IRRC*, т.е. доходности/затратности соответственно для кредитора и заемщика купонного кредитного проекта с указанными в примере параметрами, но не доходности/затратности конкретного кредитора и заемщика.

В наших обозначениях условия примера можно записать следующим образом: $m = 1$, $\delta = 0{,}08$ – номинальная годовая процентная ставка кредита; $\delta_m = \delta$ – ставка расчетного периода (проценты выплачиваются один раз в году); $\alpha = 0{,}05$ – ставка комиссии кредитора; $n = 2$ – срок кредита. Полная доходность купонного кредита $r^{(2)}$ определится из соответствующего уравнения (10), которое можно представить в виде $\varphi_0(r;\ n) = \alpha/(r - \delta_m)$. Вследствие существенной нелинейности дисконт-функции $\varphi_0(r;\ n)$ аналитическое решение составленного уравнения невозможно.

Воспользуемся верхней оценкой дисконт-функции $\varphi_0(r;\ n) < 2n/[2 + r(n + 1)]$. Тогда справедливо

$$\frac{2n}{2+r(n+1)} > \frac{\alpha}{r-\delta_m} \Rightarrow r > \frac{2(\alpha+n\delta_m)}{2n-\alpha(n+1)} = r_H .$$

При заданных параметрах кредита получим нижнюю оценку *IRRC* $r_H = 10{,}90909\%$ годовых. Для получения верхней оценки *IRRC* возьмем нижнюю оценку Д-функции $\varphi_0(r;\ n) > n/(1 + rn)$. Тогда должно выполняться неравенство

$$\frac{n}{1+rn} < \frac{\alpha}{r-\delta} \Rightarrow r < \frac{\delta}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{n(1-\alpha)} = r_B,$$

т.е. $r_B = 11{,}05263\%$. Если нам не нужны аналитические выражения оценки *IRRC*, то можно воспользоваться улучшенной нижней оценкой дисконт-функции (Жевняк, 2010, с. 64): $\varphi_0(r,n) > 0{,}5[-n(n+1)r + n\sqrt{(n+1)^2r^2+4}\,]$, которая даст более точный результат $r_B = 10{,}94385\%$.

В (Кузнецов, 2005, с.115–116) решение данного примера было найдено численным методом Ньютона–Рафсона: $r = 10{,}91643\%$ (после двух итераций при достаточно близком выборе начального значения $r = 11{,}0\%$). Ясно, что по оценкам дисконт-функции нулевой степени (П.1) проще получить приближенное решение подобных задач, которое всегда может быть принято в качестве начального приближения с последующим уточнением любым итерационным способом.

Оценки Д-функции нулевой степени (П.1) могут быть использованы при анализе доходности облигаций. Рассмотрим, например, срочную облигацию без права досрочного погашения. Пусть S – нарицательная стоимость облигации, выплачиваемая при ее погашении; $CF = S\delta_m$ – купонный доход за базисный период, вычисляемый по ставке δ_m; P_0 – рыночная цена облигации на момент ее приобретения, $P_0 = (1 - \alpha)S < S$, $0 \le \alpha < 1$ – дисконт при покупке облигации; n – число базисных периодов, оставшихся до погашения облигации. Нетрудно составить приближенную формулу доходности к погашению *YTM* (yield to maturity) такой облигации как отношение среднего дохода к средней цене за период владения:

$$YTM \approx \frac{CF+(S-P_0)n^{-1}}{0{,}5(S+P_0)} = \frac{2(S-P_0+nCF)}{(S+P_0)n} = YTM1.$$

Оценка *YTM*1 рекомендована в (Ковалев, 2007, с. 324; Четыркин, 2002, с. 238) для приближенного вычисления доходности купонной облигации. Точное значение $YTM = r > CF/S$ есть решение уравнения

$$P_0 = \sum_{j=1}^{n}\frac{CF}{(1+r)^j} + \frac{S}{(1+r)^n} \Leftrightarrow \varphi_0(r,n) = \frac{S-P_0}{Sr-CF} \Leftrightarrow \varphi_0(r,n) = \frac{\alpha}{r-\delta_m},$$

для которого на основании нижней и верхней оценок (П.1) дисконт-функции нулевой степени можно записать

$$\frac{n}{1+nr} < \frac{S-P_0}{Sr-CF} < \frac{2n}{2+(n+1)r}$$

и найти нижнюю и верхнюю оценки

$$r_H = \frac{2(S-P_0+nCF)}{S(n-1)+P_0(n+1)} < YTM < \frac{S-P_0+nCF}{nP_0} = r_B.$$

Полученная здесь нижняя оценка точнее приведенной оценки $YTM1$, поскольку

$$r_H > YTM1 \Longleftrightarrow \frac{2(S-P_0+nCF)}{S(n-1)+P_0(n+1)} > \frac{2(S-P_0+nCF)}{(S+P_0)n} \Longleftrightarrow S-P_0>0,$$

что всегда выполнятся при $S > P_0$. Из $YTM1 < r_H < r$ следует, что оценку $YTM1$ надо признать нижней оценкой доходности облигации.

Для значений $S = 1000$, $CF = 90$, $P_0 = 840$, $n = 8$ из примера, приведенного в (Ковалев, 2007, с. 325), получим: $YTM1 = 0{,}119565$, $r_H = 0{,}120879$, $r_B = 0{,}130952$ и $r_H/YTM1 = 1{,}010989$. Решение, найденное итерационным способом $r = YTM = 0{,}122489$, $YTM/YTM1 = 1{,}024454$. Таким образом, применение нижней оценки r_H почти вполовину снижает погрешность приближенного вычисления доходности купонной облигации.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Внутренняя норма доходности кредита, рассчитываемая банками по методике ЦБ РФ, является основным показателем доходности кредитного проекта, отражающим предельную доходность кредитного проекта для кредитора или затратность для заемщика. Она рассчитывается в предположении, что ставка реинвестирования платежей обслуживания является свободной рыночной ставкой размещения денежных ресурсов, т.е. без учета ограниченных возможностей кредитора и заемщика в доступе на финансовые рынки.

2. Доходность конкретного кредита для кредитора или его затратность для заемщика должны рассчитываться с учетом их реальных возможностей размещения денежных средств на рынке. В рамках такого подхода в работе предложена методика расчета инвестиционной ЭПС, где ставка реинвестирования является экзогенным параметром, вообще говоря различным для кредитора и заемщика. Сравнительный анализ инвестиционной ЭПС позволил ранжировать наиболее распространенные на практике виды кредитов по доходности/затратности для кредитора/заемщика. Установлено также, что величина инвестиционной ЭПС может быть существенно меньшей, чем внутренняя норма доходности кредита.

3. В ходе сравнительного анализа кредитов по дисконтированной сумме платежей обслуживания были получены приближенные оценки внутренней нормы доходности, которые могут быть применены и для расчета доходности некоторых типов облигаций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Дисконт-функции. Сравнение кредитов по сумме процентных платежей и платежей обслуживания.

1. При дисконтировании постоянных денежных потоков (рент) $\{R_j = R = \text{const}, j = 1,\dots, n\}$ принято использовать коэффициент приведения $a_{n;\varepsilon} = [(1+\varepsilon)^n - 1]/[\varepsilon(1+\varepsilon)^n]$, когда $\mathbb{R}_{n\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} R/(1+\varepsilon)^j = Ra_{n;\varepsilon}$. Одна из первых попыток (по крайней мере, в отечественной литературе) вычисления дисконтированных сумм переменных (степенных) рент предпринята в (Лившиц,

1960), где найдены суммы вида $\sum_{j=1}^{n} j/(1+\varepsilon)^j$ и $\sum_{j=1}^{n} j^2/(1+\varepsilon)^j$ с линейным и квадратичным ростом величины членов ренты во времени. В дальнейшем достаточно широкое практическое применение нашли ренты с постоянным абсолютным изменением величины ее членов во времени (Кузнецов, 2005; Четыркин, 2002), в которых $\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} [R + a(j-1)]/(1+\varepsilon)^j = Ra_{n;\varepsilon} + a(b_{n;\varepsilon} - a_{n;\varepsilon})$, где $b_{n;\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} j/(1+\varepsilon)^j = \{[1+(n+1)\varepsilon]a_{n;\varepsilon} - n\}/\varepsilon$.

Степенные дисконт-функции $\varphi_k(\delta_m, n) = \sum_{j=1}^{n} j^k/(1+\delta_m)^j$ степени k и порядка n введены в научный оборот в (Жевняк, 2010, с. 11–107). Они являются обобщением результатов *Я. Бернулли* в классической задаче о вычислении суммы одинаковых степеней последовательных натуральных чисел с натуральными же показателями. Применяя подстановку $r = j + 1$, формулу бинома Ньютона $(i-1)^k = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m i^{k-m}$, где $C_k^m = k!/[m!(k-m)!]$ – биномиальные коэффициенты, и изменение порядка суммирования, можно получить формулы, позволяющие выражать и эффективно вычислять Д-функции:

$$\varphi_k(\varepsilon, n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^k}{(1+\varepsilon)^j} = \sum_{r=1}^{n+1} \frac{(r-1)^k}{(1+\varepsilon)^{r-1}} = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m \sum_{r=1}^{n+1} \frac{r^{k-m}}{(1+\varepsilon)^{r-1}} =$$

$$= (1+\varepsilon) \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m \sum_{r=1}^{n+1} \frac{r^{k-m}}{(1+\varepsilon)^r} = (1+\varepsilon) \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m \varphi_{k-m}(\varepsilon, n+1).$$

Подставим $\varphi_{k-m}(\varepsilon, n+1) = \varphi_{k-m}(\varepsilon, n) + (n+1)^{k-m}/(1+\varepsilon)^{n+1}$ в формулу для $\varphi_k(\varepsilon, n)$ и, учитывая, что $\sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m (n+1)^{k-m} = [(n+1)-1]^k = n^k = [(n+1)-1]^k = n^k$, после несложных преобразований имеем

$$\varphi_k(\varepsilon, n) = \frac{n^k}{\varepsilon(1+\varepsilon)^n} - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \sum_{m=1}^{k} (-1)^m C_k^m \varphi_{k-m}(\varepsilon, n).$$

Полученные рекуррентные формулы нужны для вывода выражений Д-функций любых натуральных степеней.

Свойства степенных дисконт-функций $\varphi_k(\delta_m, n)$ достаточно подробно исследованы в (Жевняк, 2010). Они позволяют существенно упростить аналитическое исследование финансовых операций. В настоящей статье из этих свойств используются две верхние и одна нижняя оценки (записанные в явном виде), а также одна неявная оценка дисконт-функции (Д-функции) нулевой степени:

$$\varphi_0(\varepsilon, n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+\varepsilon)^j} < \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{n}{1+\varepsilon},$$

$$\varphi_0(\varepsilon, n) < \frac{2n}{2+(n+1)\varepsilon}, \quad \varphi_0(\varepsilon, n) > \frac{n}{1+n\varepsilon}, \qquad (\text{П}.1)$$

$$(1+\varepsilon)\varphi_0^2(\varepsilon, n) + n^2\varepsilon\varphi_0(\varepsilon, n) - n^2 > 0$$

(первую из этих оценок будем называть тривиальной; она слабее второй верхней оценки, так как $\frac{n}{1+\varepsilon} > \frac{2n}{2+(n+1)\varepsilon} \Leftrightarrow n > 1$, но оказывается весьма полезной при анализе). Кроме того, для изучения свойств кредитов будут применяться соотношения, связывающие дисконт-функции первой и нулевой степени

$$\frac{d\varphi_0(\varepsilon, n)}{d\varepsilon} = -\frac{\varphi_1(\varepsilon, n)}{1+\varepsilon},$$

$$\varphi_1(\varepsilon, n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{(1+\varepsilon)^j} = \{[1+(n+1)\varepsilon]\varphi_0(\varepsilon, n) - n\}/\varepsilon, \tag{П.2}$$

и, доказанное для любых $\varepsilon > 0$, $\delta_m > 0$, $n > 1$ неравенство

$$\varphi_0(\delta_m, n)\varphi_0(\varepsilon, n) - \frac{n}{\delta_m - \varepsilon}[\delta_m \varphi_0(\delta_m, n) - \varepsilon\varphi_0(\varepsilon, n)] > 0, \tag{П.3}$$

выражающее связь между двумя дисконт-функциями нулевой степени.

2. Используя записанные выражения процентных платежей и полных текущих платежей обслуживания, получим их современные стоимости при ставке дисконтирования ε:

– для ординарного кредита

$$\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j^{(1)}}{(1+\varepsilon)^j} = \frac{S\delta_m}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{n+1-j}{(1+\varepsilon)^j} = \frac{S\delta_m}{n}[(n+1)\varphi_0(\varepsilon, n) - \varphi_1(\varepsilon, n)] =$$

$$= \frac{S\delta_m}{n}[(n+1)\varphi_0(\varepsilon, n) - \{[1+(n+1)\varepsilon]\varphi_0(\varepsilon, n) - n\}/\varepsilon] = \frac{S\delta_m}{n\varepsilon}[n - \varphi_0(\varepsilon, n)],$$

$$\mathbb{P}_n^{(1)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(1)} = 0{,}5S\delta_m(n+1),$$

$$\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{R_j^{(1)}}{(1+\varepsilon)^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j^{(1)}}{(1+\varepsilon)^j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{G_j^{(1)}}{(1+\varepsilon)^j} = \frac{S\delta_m}{n\varepsilon}[n - \varphi_0(\varepsilon, n)] + \frac{S}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+\varepsilon)^j} =$$

$$= \frac{S\delta_m}{n\varepsilon}[n - \varphi_0(\varepsilon, n)] + \frac{S}{n}\varphi_0(\varepsilon, n) = \frac{S}{n\varepsilon}[(\varepsilon - \delta_m)\varphi_0(\varepsilon, n) + n\delta_m],$$

$$\mathbb{R}_n^{(1)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(1)} = \frac{S}{n}\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\varphi_0(\varepsilon, n) - (\varepsilon - \delta_m)\frac{\varphi_1(\varepsilon, n)}{1+\varepsilon}\right] = S(1 + 0{,}5\delta_m(n+1));$$

– для купонного кредита

$$\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j^{(2)}}{(1+\varepsilon)^j} = S\delta_m\varphi_0(\varepsilon, n), \quad \mathbb{P}_n^{(2)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(2)} = S\delta_m n,$$

$$\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{R_j^{(2)}}{(1+\varepsilon)^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{S\delta_m}{(1+\varepsilon)^j} + \frac{S}{(1+\varepsilon)^n} = S[1 + (\delta_m - \varepsilon)\varphi_0(\varepsilon, n)],$$

$$\mathbb{R}_n^{(2)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(2)} = S(1 + n\delta_m);$$

– для шарового кредита

$$\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(3)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j^{(3)}}{(1+\varepsilon)^j} = S\frac{(1+\delta_m)^n - 1}{(1+\varepsilon)^n}, \quad \mathbb{P}_n^{(3)} = \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(3)}(0) = S[(1+\delta_m)^n - 1],$$

$$\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(3)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{R_j^{(3)}}{(1+\varepsilon)^j} = \frac{S(1+\delta_m)^n}{(1+\varepsilon)^n}, \quad \mathbb{R}_n^{(3)} = \widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(3)}(0) = S(1+\delta_m)^n;$$

– для аннуитетного кредита с постоянными платежами $R = S/\varphi_0(\delta_m, n)$

$$\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(4)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j^{(4)}}{(1+\varepsilon)^j} = \frac{S}{\varphi_0(\delta_m, n)}\left[\varphi_0(\varepsilon, n) - \frac{\varphi_0(\chi, n)}{1+\delta_m}\right] + \frac{S\delta_m}{1+\delta_m}\varphi_0(\chi, n),$$

$$\mathbb{P}_n^{(4)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(4)} = S\left[\frac{n}{\varphi_0(\delta_m, n)} - 1\right],$$

$$\varphi_0(\chi, n) = \sum_{j=1}^{n}\frac{(1+\delta_m)^j}{(1+\varepsilon)^j} = \frac{(1+\delta_m)^n - (1+\varepsilon)^n}{(\delta_m - \varepsilon)(1+\varepsilon)^n}(1+\delta_m) > 0,$$

$$\varphi_0(\chi, n)\big|_{\varepsilon=0} = \frac{(1+\delta_m)^n - 1}{\delta_m}(1+\delta_m) = \varphi_0(\delta_m, n)(1+\delta_m)^{n+1}$$

$$\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(4)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{R_j^{(4)}}{(1+\varepsilon)^j} = R\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+\varepsilon)^j} = S\frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{\varphi_0(\delta_m, n)}, \qquad \mathbb{R}_n^{(4)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}^{(4)} = \frac{Sn}{\varphi_0(\delta_m, n)},$$

где также учтено $1 - \delta_m\varphi_0(\delta_m, n) = (1 + \delta_m)^{-n}$.

3. В книге (Жевняк, 2010, глава 7, Приложение 1) с помощью оценок (П.1)–(П.3) показано, что при любой ставке дисконтирования рассмотренные кредиты могут быть ранжированы по величине современной стоимости накопленных (суммарных) процентных платежей:

$$\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(2)} > \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(4)} > \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(1)}. \tag{П.4}$$

Не ранжированным остался только шаровый кредит, где при $\varepsilon < \delta_m$ справедливо $\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(3)} > \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(2)} > \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(4)} > \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(1)}$, так как

$$\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(3)} > \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(2)} \Longleftrightarrow \frac{(1+\delta_m)^n - 1}{(1+\varepsilon)^n} > \delta_m\varphi_0(\varepsilon, n) \Longleftrightarrow \frac{(1+\delta_m)^n - 1}{\delta_m} > \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow \delta_m > \varepsilon.$$

Здесь функция $f(\varepsilon, n) = [(1+\varepsilon)^n - 1]/\varepsilon = \varphi_0(\varepsilon, n)/[1 - \varepsilon\varphi_0(\varepsilon, n)]$ строго монотонно возрастает по ε, что следует из положительности производной

$$f'_\varepsilon(\varepsilon, n) = [n\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-1} - (1+\varepsilon)^n + 1]/\varepsilon^2 = (1+\varepsilon)^n\left[\frac{n}{1+\varepsilon} - \varphi_0(\varepsilon, n)\right]/\varepsilon$$

в силу тривиальной верхней оценки из (П.1).

По ходу приведенных рассуждений ясно также, что при $\varepsilon = \delta_m$ и $\varepsilon > \delta_m$ будет выполнено $\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(3)} = \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(2)}$ и $\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(3)} < \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(2)}$ соответственно.

С ростом ε дисконтированная сумма процентных платежей всех кредитов убывает до нуля, и всегда найдется такое значение ε_*, что при $\varepsilon > \varepsilon_*$ будет справедливо

$$\widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(3)} < \widehat{\mathbb{P}}_{n\varepsilon}^{(1)} \Longleftrightarrow [(1+\delta_m)^n - 1]/(1+\varepsilon)^n < \delta_m[n - \varphi_0(\varepsilon, n)]/n\varepsilon.$$

Очевидно, что последнее неравенство заведомо выполняется, если $[(1 + \delta_m)^n - 1]/\delta_m < [(1 + \varepsilon)^n - 1][1 - \varphi_0(\varepsilon, n)/n]/\varepsilon$. Поскольку функция $f(\varepsilon, n)$ строго монотонно возрастает с увеличением ε, то при любом $\varepsilon_0 > \delta_m$ имеет место $f(\delta_m, n)/f(\varepsilon_0, n) = a < 1$. Тогда

$$\frac{(1+\delta_m)^n - 1}{\delta_m} < \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon}\left[1 - \frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{n}\right] \Longleftrightarrow a < \frac{f(\varepsilon, n)}{f(\varepsilon_0, n)}\left[1 - \frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{n}\right].$$

Функция $F(\varepsilon, n) = 1 - \varphi_0(\varepsilon, n)/n$ строго монотонно возрастает по ε от нуля до единицы, и всегда найдется такое $\varepsilon_* > \varepsilon_0$, что $F(\varepsilon_*, n) > a$. При этом $f(\varepsilon_*, n) > f(\varepsilon_0, n)$ и $a = \dfrac{f(\delta_m, n)}{f(\varepsilon_0, n)} < \dfrac{f(\varepsilon_*, n)}{f(\varepsilon_0, n)}\left[1 - \dfrac{\varphi_0(\varepsilon_*, n)}{n}\right]$.

Отсюда с учетом

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\widehat{\mathbb{P}}^{(3)}_{n\varepsilon}/\widehat{\mathbb{P}}^{(1)}_{n\varepsilon}] = \frac{(1+\delta_m)^n - 1}{\delta_m}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^n} = 0$$

следует, что с ростом ставки дисконта современная стоимость процентных платежей шарового кредита становится меньшей и после этого будет оставаться меньшей, чем аналогичная дисконтированная сумма процентных платежей ординарного кредита, а значит, в силу (П.4) и любого из рассмотренных кредитов при той же ставке дисконта. Теоретически вопрос состоит лишь в том, при какой ставке дисконта и при каких сроках кредитования это произойдет. Таким образом, при достаточно больших ставках дисконта $\varepsilon > \delta_m$ будет выполнено $\widehat{\mathbb{P}}^{(2)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{P}}^{(4)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{P}}^{(1)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{P}}^{(3)}_{n\varepsilon}$.

4. Проведем аналогичное сравнение по сумме дисконтированных платежей обслуживания кредитов. В силу основного свойства кредита (3) при $\varepsilon = \delta_m$ современные стоимости потоков платежей обслуживания всех кредитов будут равны номинальной сумме займа S, т.е. графики функций $\widehat{\mathbb{R}}^{(\nu)}_{n\varepsilon}(\varepsilon)$ пересекаются в одной точке $\varepsilon = \delta_m$, $\widehat{\mathbb{R}}^{(\nu)}_{n\delta_m} = S$, образуя пучок кривых.

При сравнении современных стоимостей сумм платежей обслуживания кредитов имеем

$$\widehat{\mathbb{R}}^{(3)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{R}}^{(2)}_{n\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{(1+\delta_m)^n}{(1+\varepsilon)^n} > [1 + (\delta_m - \varepsilon)\varphi_0(\varepsilon, n)] \Leftrightarrow \widehat{\mathbb{P}}^{(3)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{P}}^{(2)}_{n\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon < \delta_m.$$

Нетрудно показать, что

$$\widehat{\mathbb{R}}^{(2)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{R}}^{(4)}_{n\varepsilon} \Leftrightarrow 1 + (\delta_m - \varepsilon)\varphi_0(\varepsilon, n) > \frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{\varphi_0(\delta_m, n)} \Leftrightarrow \frac{(1+\delta_m)^n - 1}{\delta_m} > \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon < \delta_m.$$

Требуя $\widehat{\mathbb{R}}^{(4)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{R}}^{(1)}_{n\varepsilon}$, получим условие

$$\frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{\varphi_0(\delta_m, n)} > \frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{n} + \frac{\delta_m}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\varphi_0(\varepsilon, n)}{n}\right),$$

равносильное неравенству $(\delta_m - \varepsilon)\varphi_0(\varepsilon, n)\varphi_0(\delta_m, n) - n[\delta_m\varphi_0(\delta_m, n) - \varepsilon\varphi_0(\varepsilon, n)] > 0$, справедливость которого вытекает из свойства (П.3) при $\varepsilon < \delta_m$.

Таким образом, для $\varepsilon < \delta_m$ справедлива цепочка неравенств

$$\widehat{\mathbb{R}}^{(3)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{R}}^{(2)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{R}}^{(4)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{R}}^{(1)}_{n\varepsilon}, \qquad (\text{П.5})$$

которая при $\varepsilon = \delta_m$ превращается в цепочку равенств

$$\widehat{\mathbb{R}}^{(1)}_{n\delta_m} = \widehat{\mathbb{R}}^{(4)}_{n\delta_m} = \widehat{\mathbb{R}}^{(2)}_{n\delta_m} = \widehat{\mathbb{R}}^{(3)}_{n\delta_m}, \qquad (\text{П.6})$$

а при $\varepsilon > \delta_m$ она инвертируется к виду

$$\widehat{\mathbb{R}}^{(1)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{R}}^{(4)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{R}}^{(2)}_{n\varepsilon} > \widehat{\mathbb{R}}^{(3)}_{n\varepsilon}. \qquad (\text{П.7})$$

5. Наряду с современной стоимостью суммы платежей обслуживания кредита рассмотрим наращенную стоимость

$$\mathbb{R}_{n\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} R_j(S, \delta_m, n)(1+\varepsilon)^{n-j} = (1+\varepsilon)^n \sum_{j=1}^{n}\frac{R_j(S, \delta_m, n)}{(1+\varepsilon)^j} = (1+\varepsilon)^n\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon},$$

которая возникает в процессе постоянного реинвестирования текущих платежей обслуживания по ставке ε и определяет величину наращенного ссудного капитала кредитора. Очевидно, современная стоимость платежей обслуживания ординарного, купонного и аннуитетного кредитов монотонно убывает с ростом ставки дисконта, но наращенный ссудный капитал, наоборот, растет, поскольку в этих кредитах $R_j > 0$ для $j = 1,\ldots, n$ и монотонный рост имеет место для каждого из первых $n - 1$ слагаемых в сумме $\sum_{j=1}^{n} R_j(1+\varepsilon)^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} R_j(1+\varepsilon)^{n-j} + R_n$, а R_n не зависит от ε. К такому же выводу приводит анализ знака производной в самом общем виде:

$$\frac{d\mathbb{R}_{n\varepsilon}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} R_j(1+\varepsilon)^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} R_j(n-j)(1+\varepsilon)^{n-j-1} = (1+\varepsilon)^{n-1}\,\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}\left[n - \frac{1}{\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}}\sum_{j=1}^{n}\frac{jR_j}{(1+\varepsilon)^j}\right],$$

где вычитаемое в квадратных скобках есть не что иное, как *дюрация Маколея* $D_n = \left(\sum_{j=1}^{n} jR_j/(1+\varepsilon)^j\right)/\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}$ для денежного потока $\{R_j, j = 1,\ldots, n\}$. Дюрация всегда удовлетворяет условию $D_n \le n$, причем $D_n = n$ имеет место только для потока, где $\{R_j = 0, j = 1,\ldots, n-1;\ R_n > 0\}$, т.е. в шаровом кредите. Таким образом, можно утверждать, что $d\,\mathbb{R}_{n\varepsilon}(\varepsilon)/d\varepsilon > 0$ для всех кредитов, кроме шарового, где $d\,\mathbb{R}_{n\varepsilon}(\varepsilon)/d\varepsilon \equiv 0$, т.е. наращенная стоимость суммы платежей обслуживания кредита (наращенный ссудный капитал кредитора) всех кредитов, кроме шарового, растет при увеличении ставки реинвестирования. При этом современная стоимость суммы платежей обслуживания всех платежей, включая шаровый, убывает, так как

$$\frac{d\widehat{\mathbb{R}}_{n\varepsilon}}{d\varepsilon} = -\frac{1}{1+\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\frac{jR_j}{(1+\varepsilon)^j}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Жевняк А.В. (2010): Математическая теория дисконтирования денежных потоков. Математическая теория кредита. Рязань: Ринфо.

Ковалев В.В. (2007): Управление активами фирмы. М.: Проспект.

Кузнецов Б.Т. (2010): Инвестиции. М.: Юнити-Дана.

Кузнецов Б.Т. (2005): Финансовая математика. М.: Экзамен.

Лившиц В.Н. (1960): Основы технико-экономического сравнения различных систем электровозов переменного тока промышленной частоты. В сб. "*Электрификация железных дорог*". Вып. 2. М.: АН СССР.

Федоров Б.В. (2008): Как правильно взять и вернуть кредит: на покупку недвижимости, автомобиля, техники. СПб.: Питер.

Четыркин Е.М. (2002): Финансовая математика. М.: Дело.

Поступила в редакцию
29.06.2010 г.

Mathematical Models and Valuation of the Loan Effectiveness

A.V. Zhevnyak

Using a new technique of discounting on the basis of a special class of functions (discount functions), mathematical models of common credit schemes, a comparative analysis of their profitability / costs for the lender / borrower. Given a critical analysis of the existing CBR technique for determining the effective interest rate loan as a measure of its profitability for the lender or costs for the borrower. Shown the possibility of using the discount functions for the analysis of bond yield.

Keywords: calculation, loan, lender, borrower, yield, effective interest rate, EPS, IRR, reinvestment, discounting.