ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2012, том 48, № 2, с. 95–107

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ПОСТРОЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПО ДАННЫМ ОБ ИНВЕСТИЦИЯХ*

© 2012 г. **В.К. Горбунов, А.Г. Львов**

(Ульяновск)

Предлагается метод построения "капитальных" производственных функций, один из факторов которых – стоимость используемых (эффективных) фондов, формируемая по информации об инвестициях в основные и/или оборотные фонды на промежутке наблюдения исследуемого объекта. При этом также оцениваются: эффективные фонды, режимы амортизации фондов и освоения инвестиций.

Ключевые слова: капитальные и инвестиционные производственные функции, эффективные фонды, амортизация, лаг инвестиций, оценка параметров, продолжение по параметру.

ВВЕДЕНИЕ

Производственные функции (ПФ) являются математическими моделями крупных производственных объектов – предприятий (фирм), отраслей, региональных и национальных экономик. Эти модели типа "черного ящика" представляют валовой выпуск производства как функцию объемов затрат наиболее существенных (для конкретного исследования) факторов. Метод производственных функций можно отнести к "высоким технологиям" количественного экономического анализа (Клейнер, 1986; Hackman, 2008). Он применялся в СССР в исследовательских работах и планировании на союзном, региональном и отраслевом уровнях (Терехов, 1974; Плакунов, Раяцкас, 1984; Клейнер, 1986). В последнее десятилетие появились работы, в которых метод ПФ применяется для анализа новой российской экономики, формирующейся на основе реставрации частной собственности и рыночных отношений (Бессонов, 2002; Воскобойников, 2004; Сюань, 2007). Однако здесь проявилась проблема информационного обеспечения построения ПФ, характерная для специфических российских условий.

Наиболее важным фактором, учитываемым в испытанных десятилетиями типах ПФ, является стоимость основных и оборотных фондов (рассматриваемых в совокупности или раздельно), которую обычно кратко называют "капиталом". В качестве второго фактора традиционно рассматривается труд. Также возможно привлечение других факторов (энергия, сырьевые ресурсы и т.д.). Соответственно эконометрическая задача построения ПФ, зависящей от количества используемого капитала и адекватной экономическому объекту, может решаться на основе известной динамики капитальных затрат (наряду с другими факторами и выпуском) в наблюдаемый период. Однако для российской экономики, с 1992 г. ставшей сырьевым придатком лидеров мирового рынка, характерна низкая загруженность основных фондов в большинстве несырьевых отраслей промышленности и сельского хозяйства[1]. Высокие темпы инфляции 1990-х годов ввиду несовершенства методов построения экономических индексов делают проблему сопоставления цен и количеств производства в тот период малосодержательной (Зоркальцев, 1996; Бессонов

* Исследование выполнено при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программой Минобразования РФ "Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.), проект 2.1.3/6763 "Развитие математических моделей и анализ рыночного спроса и производства".

[1] Например, крупнейшее авиастроительное предприятие России "Авиастар-СП" (г. Ульяновск) имеет мощности для годового выпуска 50 самолетов Ан-124 ("Руслан") и Ту-204, но максимальный годовой выпуск за последние 18 лет составил всего шесть самолетов Ту-204. См. http://www.aviastar-sp.ru/aviastar_ru/index.htm.

1998; Айзенберг, Солонина, 2007). В этих условиях испытанные методы построения ПФ не могут обеспечить хорошую адекватность математического моделирования экономики.

Более доступной характеристикой, связанной с капиталом и определяющей его динамику, являются инвестиции в основной и/или оборотный капитал. Инвестиции представляют собой, как правило, реально используемую в производстве часть капитала, а их динамика соответствует рыночной конъюнктуре. Однако данных об инвестициях недостаточно для измерения *эффективного*, т.е. реально используемого в производстве, капитала, так как освоение некоторых инвестиций (закупка оборудования, новое строительство и т.п.) требует значительного времени, а сформированный в прошлом капитал подвержен износу. Инвестиции представляют собой величину типа "поток", а капитал – "запасы". При отсутствии инвестиций производство может некоторое время функционировать за счет накопленного капитала. Несмотря на эти очевидные различия, современные исследователи, использующие метод производственных функций, строят (Бессонов, 2002; Сюань, 2007) или используют в теоретических работах (Лукашин, Рахлина, 2004; Демченко, 2006) так называемые "инвестиционные" ПФ, отличающиеся от традиционных "капитальных" простой заменой фактора "капитал" на текущие инвестиции. От таких моделей производства трудно ожидать высокого качества.

Мы предлагаем развитие метода наименьших квадратов (МНК) для построения капитальных ПФ из некоторого параметрического класса по данным об инвестициях, затратах других учитываемых факторов и выпуске. Одновременно оценивается величина начального значения капитала, средний уровень амортизации и скорость освоения инвестиций в период наблюдения. Это достигается с помощью уравнений динамики производственных фондов с учетом их амортизации и лага (задержки освоения) инвестиций. При этом на периоде наблюдения реконструируется динамика не формально существующих (балансовых) фондов, а их эффективно используемой части. Оценка эффективных фондов представляет собой специальную проблему, изучаемую рядом авторов (Воскобойников, 2004; Бессонов, Воскобойников, 2006; Ханин, Фомин, 2007).

Добавление к оцениваемым параметрам ПФ начального капитала, коэффициента амортизации капитала и параметра лага, определяющего задержку освоения инвестиций, делает задачу оценивания существенно нелинейной и плохо обусловленной даже в простейшем классе функций Кобба–Дугласа. Алгоритмические осложнения определяются объективной сложностью рассматриваемой проблемы. Её решение требует совершенствования методов минимизации функции невязки регрессионных уравнений.

В разд. 1 статьи излагается стандартный параметрический метод построения ПФ и обсуждается проблема сравнения качества различных параметрических классов. В разд. 2 ставится задача построения *капитальных* ПФ по информации об инвестициях на периоде наблюдения исследуемого объекта. В разд. 3 для решения этой задачи разработан специальный вариант метода продолжения по параметру, известного для решения нелинейных уравнений (Ортега, Рейнболдт, 1975). В разд. 4 представлены результаты построения инвестиционной и капитальной ПФ по двум тестам и реальным статистическим данным российской экономики.

1. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ограничимся проблемой построения наиболее распространенных двухфакторных ПФ вида

$$Y = F(K, L), \tag{1}$$

где Y – стоимость валового выпуска исследуемого производственного объекта, определяемая факторами: K – стоимость производственных фондов (капитал), L – затраты труда. Функция F в соответствии с экономическим смыслом должна быть положительной (при положительных аргументах), непрерывной, возрастающей и квазивогнутой (Клейнер, 1986). Возможны дополнительные условия вогнутости и положительной однородности.

Функция F будет строиться в некотором параметрическом классе, поэтому список ее аргументов удобно расширить, включив вектор параметров $w = (w_1, ..., w_m)$:

$$Y = F(K, L; w). \tag{2}$$

Записи (1) и (2) эквивалентны и выбираются в зависимости от контекста. На параметры накладываются условия, обеспечивающие требуемые аналитические свойства искомой функции. Эти условия определяют допустимое множество параметров W.

Стандартная задача построения ПФ (2) решается на основе наблюдения значений выпуска и производственных факторов

$$\{Y_t, K_t, L_t: t = 1, ..., T\}. \tag{3}$$

Требуется так подобрать класс функций и конкретные параметры w, чтобы значения (Y_t, K_t, L_t) удовлетворяли равенствам (2) наилучшим образом относительно выбранного критерия качества. Вследствие идеализации моделирования и погрешностей измерений равенства (2) на данных (3) в совокупности, как правило, не могут быть удовлетворены. Наиболее распространенный способ "хорошего" удовлетворения этих равенств – метод наименьших квадратов (МНК), предложенный Гауссом и Лежандром для обработки астрономических измерений. Для рассматриваемой нелинейной в общем случае проблемы МНК заключается в нахождении параметров $\hat{w}$ из условия минимизации суммы квадратов невязок уравнений (2) на данных (3) на допустимом множестве W:

$$\varphi(w) = \sum_{t=1}^{T}[Y_t - F(K_t, L_t; w)]^2 \to \min_W. \tag{4}$$

Вопрос качества решения задачи построения ПФ по статистическим данным ставится и решается в рамках регрессионного анализа (Айвазян и др., 1985; Бард, 1979; Демиденко, 1989; Мхитарян и др., 2006). При этом данные (3) принято связывать регрессионной системой уравнений

$$Y_t = F(K_t, L_t; w) + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., T, \tag{5}$$

где ε_t – случайные величины, представляющие погрешности измерений данных и ошибки моделирования. Задача определения параметров w из символических условий (5) называется *задачей оценивания* параметров w. Эта задача должна быть конструктивно доопределена. Метод (4) – основной способ такого доопределения.

Качество ПФ, построенной в данном классе (2), определяется *остатками регрессии* (5):

$$r_t = Y_t - F(K_t, L_t; \hat{w}), \quad t = 1, ..., T, \tag{6}$$

которые можно понимать как реализации случайных величин ε_t, соответствующие полученной оценке параметров $\hat{w}$. Набор остатков (6) является псевдослучайной последовательностью. Для этих остатков определены основные характеристики случайных величин: среднее, дисперсия, моменты высоких степеней, показатель автокорреляции остатков. Но теперь это не теоретические, а выборочные характеристики, вычисляемые по известным формулам без использования функций распределения случайных величин ε_t. Качество оценивания параметров ПФ определяется степенью совпадения теоретических характеристик случайных величин ε_t и соответствующих выборочных характеристик остатков r_t.

Достаточно полный статистический анализ точности полученного уравнения связи (5) возможен лишь в рамках схемы, постулирующей, что класс $F(K, L; w)$ содержит в себе истинную функцию регрессии, случайные компоненты ε_t аддитивны (т.е. запись (5) корректна), независимы и подчиняются нормальному закону распределения со средним значением $M\varepsilon_t = 0$ и одинаковыми дисперсиями $D\varepsilon_t = \sigma^2$, т.е. $\varepsilon_t \in N(0, \sigma^2)$ (Айвазян и др., 1985). Однако эти предпосылки в случае построения производственных функций классов, более содержательных, чем класс Кобба–Дугласа, трудно обосновать. Некоторые исследователи считают необоснованным широкое применение нормального распределения в практике вероятностных расчетов (см., например (Резников, 1976)). Доводы в пользу такой точки зрения можно найти в книге (Плакунов, Раяцкас, 1984, с. 177).

Существуют приемы линеаризации некоторых типов нелинейных регрессий (Мхитарян и др., 2006), но в случае построения ПФ их можно применить лишь для класса функций Кобба–Дугласа. Если функция регрессии $F(K, L; w)$ зависит от параметров w существенно нелинейно, то МНК-оценки $\hat{w}$ определяются не явными аналитическими выражениями, а лишь алгоритмически, что существенно затрудняет исследование их свойств (Айвазян и др., 1985, с. 338). Оценка точности нелинейной модели регрессии (5) опирается на те же свойства МНК-оценок $\hat{w}$, что и в линейном случае (состоятельность, эффективность и несмещенность), но лишь в асимптотическом (при $T \to \infty$) смысле, а также на разложение функции регрессии $F(K, L; w)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $w = \hat{w}$ и на возможность вычислять ковариационную матрицу оценок $\hat{w}$. Данная (эвристическая) методика детально описана в (Айвазян и др., 1985, с. 352–355). В нелинейном случае большое внимание уделяется алгоритмической стороне решения задачи МНК (Демиденко, 1989).

В существенно нелинейном случае набор статистических критериев качества очень узкий и должен дополняться содержательными аргументами относительно выбора класса параметризации. Для построения ПФ, в частности, должны привлекаться более широкие классы функций: постоянной эластичности замещения (ПЭЗ), переменной эластичности – однородные (Горбунов, Ледовских, 2008; Горбунов, Львов, 2009; Львов, 2010) и неоднородные функции (Солоу, транслоговые ПФ). Переход к более широкому классу ПФ должен повышать качество моделирования исследуемого объекта.

В качестве общих статистических критериев мы используем коффициент детерминации R^2 и критерий Дарбина–Уотсона (Кейн, 1977). Чем ближе значение R^2 к единице, тем лучше модель соответствует эмпирическим наблюдениям (3). Критерий Дарбина–Уотсона проверяет стандартную гипотезу об отсутствии автокорреляции остатков регрессии (6), для чего требуется вычислить величину

$$DW = \sum_{t=2}^{T}(r_t - r_{t-1})^2 / \sum_{t=1}^{T} r_t^2 .$$

Возможные значения критерия DW находятся в интервале от 0 до 4. Если автокорреляция остатков отсутствует, то $DW \approx 2$.

2. ИНВЕСТИЦИОННЫЕ И КАПИТАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Далее функции класса (2) будем называть *капитальными*. По отмеченным во введении причинам относительно надежная производственная статистика исследуемых объектов последних лет обычно содержит данные о выпуске Y_t, инвестициях I_t и затратах труда L_t:

$$\{Y_t, I_t, L_t: t = 1, ..., T\}. \tag{7}$$

В последнее десятилетие в экономический анализ введены ПФ, где вместо капитала K берутся инвестиции I. Соответствующие функции

$$Y = F(I, L; w) \tag{8}$$

будем называть *инвестиционными*. Оценка параметров инвестиционных функций (8) по данным проводится с помощью МНК так же, как и оценка параметров капитальных функций (2) по данным (3).

Построение более содержательных капитальных функций (2) по данным (7) также возможно в силу того, что накопленный капитал K_t зависит от инвестиций, сделанных к настоящему моменту, и от процесса его выбытия (амортизации). Для формирования показателей K_t следует описать их динамику.

В общем случае для освоения инвестиций требуется время, и капитализация инвестиций происходит за несколько периодов наблюдений. Амортизация капитала является сложным процессом. Примем обычное упрощающее предположение о постоянстве *нормы амортизации* (*depreciation rate*), обозначив ее δ, и будем считать, что прирост капитала определяется инвестициями текущего и предыдущего периодов в некоторой пропорции. Введем коэффициент $\xi \in [0, 1]$, обозначающий долю инвестиций, освоенных в текущем периоде. При этом уравнение динамики фондов будет иметь вид

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + \xi I_t + (1-\xi)I_{t-1}, \quad t = 1, ..., T. \tag{9}$$

Для определения величин $\{K_1, ... K_T\}$ следует задать начальное значение запаса капитала K_0 и инвестиции периода, предшествующего наблюдениям, т.е. I_0. Теперь динамика капитала определяется, кроме известных на расширенном промежутке наблюдения значений инвестиций $\{I_0, ..., I_T\}$, еще и неизвестными: начальным капиталом K_0, нормой амортизации δ и коэффициентом ξ. Соответственно значения K_t являются функциями новых параметров $K_t = K_t(K_0, \delta, \xi)$ и список оцениваемых параметров расширяется до вектора $z = (w_1,..., w_m, K_0, \delta, \xi)$. Это усложняет задачу, но делает ее более адекватной проблеме моделирования производства и позволяет оценить реально используемый капитал.

Таким образом, задача оценивания параметров капитальной ПФ (2) и реконструкции динамики капитала (9) по данным (7) заключается в минимизации функции

$$\psi(z) = \sum_{t=1}^{T} [Y_t - F(K_t, L_t; w)]^2 \tag{10}$$

при условии (9) и ограничениях на параметры z:

$$w \in W, \quad K_0 > 0, \quad \delta > 0, \quad 0 \le \xi \le 1. \tag{11}$$

Параметры K_0, δ и ξ, найденные таким способом, определяют динамику эффективного капитала.

Легко увидеть, что восстанавливаемые значения капитала (9) при $\xi = 1$ и $\delta \uparrow 1$(односторонний предел слева) принимают значения инвестиций I_t, и капитальная функция (2) совпадает на статистических данных (7) с инвестиционной функцией (8). Это значит, что капитальная и инвестиционная функции идентичны, если инвестиции осваиваются быстро – за один период ($\xi = 1$), а введенные фонды работают один период ($\delta = 1$). Соответственно задача построения инвестиционной ПФ (8) по данным (7) – это частный случай новой задачи (9)–(11) – для капитальной ПФ (2) при $\delta = \xi = 1$.

Рекуррентное уравнение (9) можно записать в конечной форме, исключая для каждого значения $t > 1$ промежуточные значения $K_1,... K_{t-1}$:

$$K_t = K_0(1-\delta)^t + \xi \sum_{i=1}^{t} I_i (1-\delta)^{t-i} + (1-\xi)\sum_{i=0}^{t-1} I_i (1-\delta)^{t-i-1}, \quad t = 1, ..., T. \tag{12}$$

Эти формулы можно использовать вместо условий (9) при минимизации функции (10).

Описанный метод построения капитальной ПФ, очевидно, применим для функций с любым числом факторов, среди которых есть капитал.

3. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Задача минимизации (10) при условиях (9) (или (12)) и (11) существенно нелинейная относительно оцениваемых параметров. Правые части выражений (12) содержат высокие степени выражений $(1 - \delta)$. Это влечет плохую обусловленность минимизируемой функции (10) и возможную многоэкстремальность задачи минимизации. Успех поиска минимизирующего набора $\hat{z} = (\hat{w}_1, ..., \hat{w}_m, \hat{K}_0, \hat{\delta}, \hat{\xi})$ в таком случае зависит от хорошего начального приближения параметров $z^0 = (\hat{w}_1^0, ..., w_m^0, K_0^0, \delta^0, \xi^0)$. Такое допустимое начальное приближение будем называть *экспертным*.

Для решения поставленной задачи мы предлагаем специальный вариант известного итеративного *метода продолжения* (*Continuation Method*) для решения систем нелинейных уравнений (Ортега, Рейнболдт 1975; Nocedal, Wright, 2006). Аналогично стандартной схеме метода продолжения для нашей экстремальной задачи вводится параметр λ, меняющийся от нуля до единицы и определяющий семейство вспомогательных задач так, что при $\lambda = 0$ задача имеет простой вид с известным решением, а при $\lambda = 1$ – принимает исходный вид. При переходе к новому (возрастающему) значению λ с достаточно малым шагом решение, полученное на предыдущем шаге, принимается за начальное приближение решения новой задачи минимизации того же класса, но с новыми данными, мало отличающимися от предыдущих.

Опишем *алгоритм метода продолжения по параметру* λ, введя счетчик итераций k. Для краткости задачу минимизации (10) при условиях (11) и (12) с различными на каждой итерации данными будем обозначать задачей (10). Решение задачи на итерации k обозначим $z^k = (w_1^k, ..., w_m^k, K_0^k, \delta^k, \xi^k)$ и соответствующие выпуски обозначим $Y_t^k = F(K_t, L_t; w^k)$, $t = 1, ..., T$.

1. Полагаем $k = 0$, $\lambda_0 = 0$, выбираем экспертное приближение вектора параметров $z^0 = (w_0^1 ..., w_m^0, K_0^0, \delta^0, \xi^0)$ и вычисляем условные выпуски $Y_t^0 = F(K_t, L_t; w^0)$, $t = 1, ..., T$. Задача (10) с такими выпусками имеет очевидное решение z^0.

2. Полагаем $k := k + 1$, присваиваем параметру λ_k некоторое умеренно большее значение и решаем задачу (10) с выпусками $Y_t^k = (1 - \lambda_k) Y_t^{k-1} + \lambda_k Y_t$, $t = 1, ..., T$.

3. Вычисления пункта 2 повторяются до некоторой итерации $k = N$, на которой $\lambda_N = 1$. При этом $Y_t^N = Y_t$, т.е. условные выпуски становятся реальными статистическими выпусками, и соответствующая оценка параметров принимается за решение основной задачи минимизации (10) при условиях (12) и (11): $\hat{z} = z^N$.

Приращения параметра λ_k выбираются так, чтобы решения задач (10) достигались с требуемой точностью (например, по малости приращений аргументов в процедуре минимизации), а параметр продолжения $\lambda_N = 1$ – за конечное число итераций.

Разумеется, данный алгоритм нуждается в обосновании сходимости, так как последовательность параметров продолжения λ_k, при которых каждая новая задача минимизации невязки решается с требуемой точностью, может расти очень медленно. Это специальная сложная проблема вычислительной математики. Метод продолжения по параметру обоснован для широкого класса вычислительных задач и по литературным данным обеспечивает во многих случаях нахождение глобального минимума многоэкстремальных задач. Наш опыт, излагаемый ниже, это подтверждает.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Изложенная в разд. 1–3 методика построения ПФ апробирована на симулированных данных с заранее известными "истинными" зависимостями (2) и динамикой эффективных фондов (12), а также на официальных статистических данных российской экономики. При обработке реальной информации мы руководствовались соответствующей техникой из (Бессонов, 2002, с. 50–55). Все расчеты реализованы в программной системе "Mathematica".

Метод построения капитальных ПФ класса продемонстрируем вначале на примере простейшего, но наиболее часто используемого класса двухфакторных *капитальных* степенных функций Кобба–Дугласа (КД)[2]:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}. \tag{13}$$

Все параметры этой функции $w = (A, \alpha, \beta)$ – положительные. Эта функция положительно однородна степени $\alpha + \beta$ и имеет постоянную эластичность замещения факторов, равную единице. Выпуск (13) с учетом формулы (12) имеет вид

$$Y_t = A[K_0(1-\delta)^t + \xi\sum_{i=1}^{t} I_i(1-\delta)^{t-i} + (1-\xi)\sum_{i=0}^{t-1} I_i(1-\delta)^{t-i-1}]^{\alpha} L_t^{\beta}, \quad t = 1, ..., T. \tag{14}$$

[2] Эта исторически первая ПФ, оцененная Коббом и Дугласом в 1928 г. для экономики США, была предложена в начале XX в. шведским экономистом К. Викселем.

Таблица 1. Исходные данные и оценка эффективного капитала для примера 1

t	Исходные данные		Смоделированные данные		Оценка капитала $\hat{K}_t$
	L_t	I_t	K_t^0	Y_t	
1	100	230	1263,00	766,19	1262,84
2	110	270	1390,70	843,41	1390,51
3	120	450	1629,63	967,25	1629,42
4	130	350	1856,67	1085,41	1856,43
5	140	500	2111,00	1214,09	2110,73
6	150	600	2459,90	1379,43	2459,59
7	160	700	2873,91	1568,01	2873,56
8	170	900	3406,52	1798,36	3406,11
9	155	600	3785,87	1882,90	3785,41
10	100	230	3917,28	1828,76	3916,76

Таблица 2. Исходные данные и оценка эффективного капитала для примера 2

t	Исходные данные		Смоделированные данные		Оценка капитала $\hat{K}_t$
	L_t	I_t	K_t^0	Y_t	
1	75300	220	2413,25	939,78	2506,40
2	73840	200	2496,59	933,19	2588,32
3	72071	135	2519,76	921,58	2609,66
4	70100	110	2508,77	906,89	2597,49
5	68480	85	2473,33	893,58	2560,92
6	66409	65	2418,67	876,01	2505,18
7	65950	60	2358,73	870,01	2444,36
8	64693	55	2296,80	857,96	2381,48
9	63812	85	2260,96	849,81	2345,13
10	63963	155	2288,91	852,18	2373,06

Такое представление упрощает задачу оценивания расширенного набора параметров $z = (w, K_0^0, \delta^0, \xi^0)$ по информации (7), которая принимает форму минимизации функции (10) при условиях (11).

Введем также *инвестиционную* функцию КД, используемую другими авторами в отмеченных выше работах:

$$Y = AI^{\alpha}L^{\beta}. \tag{15}$$

Ограничения на параметры w при замене фактора K на I сохраняются. Выражение (14) показывает, что эта функция совпадает на статистических данных (7) с капитальной функцией (13) при $\delta = \xi = 1$, т.е. когда инвестиции осваиваются мгновенно ($\xi = 1$), а введенные фонды работают один период ($\delta = 1$).

Рассмотрим два тестовых примера. В табл. 1, 2 представлены условные статистические данные о затратах труда L_t и инвестициях I_t, смоделированные по уравнению (12) с начальными параметрами (K_0^0, δ^0, ξ^0) значения капитала K_t^0, смоделированные по вспомогательной ПФ $F(K, L; w)$ исходные данные выпуска $Y_t = F(K_t^0, L_t; w)$ и построенные после решения задачи оценки эффективного капитала $\hat{K}_t$.

В первом примере выпуски Y рассчитывались с помощью однородной ПФ с постоянной эластичностью замещения (ПЭЗ)

$$Y = A(\nu K^{-\rho} + (1-\nu)L^{-\rho})^{-\mu/\rho}, \tag{16}$$

где параметры $A > 0$, $0 \le \nu \le 1$, $-1 \le \rho \ne 0$, μ – степень однородности. Эта функция обобщает функцию КД (13). Последняя является предельной для ПЭЗ при $\rho \to 0$. Параметры предельной функции КД: $\alpha = \mu\nu$, $\beta = \mu(1-\nu)$.

Во втором примере применялась функция Солоу

$$Y = A(\nu K^{\alpha} + (1-\nu)L^{\beta})^{\gamma}. \tag{17}$$

Эта функция представляет собой неоднородное обобщение ПЭЗ . Здесь ограничения на параметры A, ν аналогичны и степени α, β, γ ненулевые.

Мы используем в тестовых примерах более общие классы функций, чем класс поиска, поскольку модель (функция КД) всегда проще исследуемого объекта.

Для первого примера выбраны следующие параметры функции (16): $A = 1,3$, $\nu = 0,7$, $\mu = 1$, $\rho = 0,02$. Начальный капитал $K_0^0 = 1250$, норма амортизации $\delta^0 = 0,1$, коэффициент освоения инвестиций $\xi^0 = 0,6$. В обоих примерах $I_0 = 0$.

Во втором примере параметры функции (17) $A = 0,9$, $\nu = 0,38$, $\alpha = 0,17$, $\beta = 0,2$, $\gamma = 3,5$. Динамические параметры: $K_0^0 = 2355$, $\delta^0 = 0,05$, $\xi^0 = 0,8$.

В табл. 3, 4 представлены результаты оценивания функций (15) и (13). Пример 3 построения соответствующих функций КД по реальным данным описан ниже. В скобках приведены t-статистики. По результатам оценивания капитальной функции (13) для тестовых примеров 1 и 2 видно, что полученные оценки начального капитала $\hat{K}_0$, нормы амортизации $\hat{\delta}$ и параметра $\hat{\xi}$ довольно точные. Это позволяет оценить динамику эффективного капитала $\hat{K}_t$ (табл. 1, 2).

В третьем примере использовались официальные данные 2000–2008 гг. из "Российского статистического ежегодника" за 2001–2009 гг. (РСЕ, 2009). В этом сборнике приведены стоимостные показатели валового внутреннего продукта (ВВП), балансовых основных фондов на начало года и годовых инвестиций в основной капитал в текущих ценах, а также среднегодовая численность занятых в экономике. Они представлены в табл. 5. Эта информация достаточна для решения поставленной задачи (10), но стоимостные показатели необходимо привести к сопоставимым ценам, например базового 2000 г. Для этого мы использовали также доступные данные о годовых индексах (в сопоставимых ценах) перечисленных стоимостных показателей (табл. 6). По этим индексам были сформированы соответствующие индексы относительно базового 2000 г. Как и в работе (Бессонов, 2002, с. 83), индексы основных фондов брались в среднем за год (среднее двух значений соседних лет на начало года). На основе этих индексов и начальных (на 2000 г.) значений стоимостных показателей сформированы абсолютные значения стоимостных показателей в ценах 2000 г., представленные, кроме основных фондов, в табл. 6. Ввиду высокой степени незагруженности фондов, находящихся на балансе многих предприятий, данные относительно балансовых фондов не должны использоваться для построения капитальных функций. Результаты построения капитальных ПФ, приведенные в табл. 7 (критерии качества и параметры) и табл. 8 (эффективные фонды), получены нашим методом без использования балансовых фондов. Соответствующие скорректированные данные (балан-

Таблица 3. Оценки параметров инвестиционной ПФ (15)

Пример	Оценки параметров			Критерии качества		
	$\hat{A}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\varphi(\hat{w})$	R^2	DW
1	0,8504 (0,224)	0,0345 (0,053)	1,4514 (0,879)	551154	0,654	0,409
2	0,8862** (3,367)	0 (0)	0,6208* (22,415)	65,5315	0,994	0,616
3	278,618 (0,251)	0,4716* (6,312)	1,3533 (0,933)	0,171	0,992	1,45

Примечание. "*" помечены оценки параметров, отличающихся от нуля на уровне значимости 1%, "**" – на уровне 5%.

Таблица 4. Результаты оценивания капитальной ПФ (13)

Пример	Оценки параметров $\hat{z}$						Критерии качества		
	$\hat{A}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	K_t^0	$\hat{\delta}$	$\hat{\xi}$	$\psi(\hat{w})$	R^2	DW
1	1,3019* (2180,57)	0,6987* (48518,8)	0,3013* (5358,4)	1249,87* (5469,22)	0,1* (2899,6)	0,599* (12283,9)	0,000051	1	2,49
2	0,6806* (5,918)	0,1222* (6,78)	0,5586* (375,3)	2446,42* (6,741)	0,0486* (6,67)	0,81* (49,7)	0,00067	1	2,75
3	3,0024 (0,211)	0,6253 (1,536)	0,1504 (0,105)	7,058 (0,298)	0,058 (0,139)	1 (0,56)	0,069	0,997	1,68

Пример	Оценки параметров $\hat{z}$						Критерии качества		
	$\hat{A}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	K_t^0	$\hat{\delta}$	$\hat{\xi}$	$\varphi(\hat{w})$	R^2	DW
1	1,3019* (2180,57)	0,6987* (48518,8)	0,3013* (5358,4)	1249,87* (5469,22)	0,1* (2899,6)	0,599* (12283,9)	0,000051	1	2,49
2	0,6806* (5,918)	0,1222* (6,78)	0,5586* (375,3)	2446,42* (6,741)	0,0486* (6,67)	0,81* (49,7)	0,00067	1	2,75
3	3,0024 (0,211)	0,6253 (1,536)	0,1504 (0,105)	7,058 (0,298)	0,058 (0,139)	1 (0,56)	0,069	0,997	1,68

Примечание. "*" помечены оценки параметров, отличающихся от нуля на уровне значимости 1%.

совых фондов) приводятся в табл. 8 для сравнения с получаемыми оценками эффективного капитала.

По данным о ВВП и инвестициям (табл. 6), значению инвестиций в предшествующем году $I_{1999} = 0{,}993$ и численности занятых (табл. 5) построены инвестиционная (15) и капитальная (14) производственные функции класса КД, а также оценены уровень амортизации фондов, скорость освоения инвестиций и эффективно используемый капитал на периоде наблюдения. Результаты оценивания параметров представлены в третьих строках табл. 3, 4 соответственно. Легко заметить, что статистические критерии качества регрессионных моделей улучшаются при переходе от инвестиционной ПФ (15) к капитальной (14).

Таблица 5. ВВП, фонды, инвестиции в текущих ценах (трлн руб.) и численность занятых (млн чел.)

Год t	Y_t	K_t	I_t	L_t
2000	7,306	16,605	1,165	64,5
2001	8,944	20,241	1,505	65,0
2002	10,831	24,431	1,762	65,6
2003	13,243	30,329	2,186	66,0
2004	17,048	32,541	2,865	66,4
2005	21,625	38,366	3,611	66,8
2006	26,903	43,823	4,730	67,2
2007	33,111	54,252	6,716	68,0
2008	41,668	64,553	8,765	68,5

Источник: РСЕ, 2009, табл. 5.5, 11.1, 11.23, 23.2.

Таблица 6. Годовые индексы ВВП, фондов и инвестиций и значения в ценах 2000 г., трлн руб.

Год t	Y_t/Y_{t-1}	K_t/K_{t-1}	I_t/I_{t-1}	ВВП Y_t	Инвестиции I_t
2000	1,100	1,001	1,174	7,306	1,165
2001	1,051	1,009	1,100	7,678	1,282
2002	1,047	1,010	1,028	8,039	1,318
2003	1,073	1,013	1,125	8,626	1,482
2004	1,072	1,016	1,137	9,247	1,685
2005	1,064	1,019	1,109	9,839	1,869
2006	1,077	1,024	1,167	10,596	2,181
2007	1,081	1,031	1,227	11,455	2,676
2008	1,056	1,036	1,098	12,096	2,939

Источник: РСЕ, 2009, табл. 11.1, 11.23, 23.2.

Таблица 7. Критерии качества оценивания ПФ и параметры динамики эффективного капитала

Функция	Критерии качества			Параметры динамики		
	$\psi(\hat{z})$	R^2	DW	K_t^0	$\hat{\delta}$	$\hat{\xi}$
КД (13)	0,069	0,997	1,688	7,058 (0,298)	0,058 (0,139)	1 (0,56)
ПЭЗ (16)	0,0645	0,997	1,775	6,815 (0,22)	0,078 (0,104)	0,999 (0,193)
Солоу (17)	0,0092	0,999	2,458	6,453 (0,222)	0,15 (0,203)	1 (0,594)
Джири (18)	0,0146	0,999	2,286	7,0791 (0,086)	0,151 (0,0862)	0,9556 (0,44)

Таблица 8. Наличные и эффективные фонды (трлн руб.) в ценах 2000 г.

Год t	Наличные фонды K_t	Эффективные фонды $\hat{K}_t$			
		КД	ПЭЗ	Солоу	Джири
2000	16,605	7,846	7,476	6,684	7,196
2001	18,423	8,687	8,186	6,980	7,399
2002	18,608	9,479	8,840	7,232	7,577
2003	18,822	10,425	9,642	7,646	7,918
2004	19,094	11,516	10,580	8,198	8,408
2005	19,429	12,743	11,645	8,867	9,024
2006	19,846	14,198	12,925	9,735	9,841
2007	20,392	16,068	14,604	10,974	11,026
2008	21,075	18,028	16,351	12,226	12,245

Наряду с функцией КД для данных о ВВП, инвестициях и труде (табл. 5, 6), были построены капитальные функции ПЭЗ (16), Солоу (17) и функция Джири (Geary, 1950; Pollak, Wales, 1969)[3]:

$$Y = A(K - K^*)^{\alpha}(L - L^*)^{\beta}. \tag{18}$$

Данная функция является неоднородным обобщением функции КД (13) с дополнительными параметрами – минимальными уровнями использования капитала K^* и труда L^*. Все параметры этой функции положительные.

Задачи нелинейного МНК (10) с ограничениями на вектор параметров w для указанных параметрических классов требуют хороших начальных приближений w^0, поэтому они решались последовательно с передачей полученных параметров в качестве начальных для более сложной функции. Так как функции ПЭЗ (16) и Джири (18) обобщают функции КД, то разумным начальным приближением здесь будет нелинейная оценка параметров функции (14). Аналогичные рассуждения справедливы и для функции Солоу (17). Здесь в качестве начального приближения следует взять оценки параметров функции ПЭЗ. Получены следующие результаты. Оценки параметров функций:

ПЭЗ : $\hat{A}$ = 2,3515 (0,036), $\hat{\nu}$ = 0,9113 (0,188), $\hat{\mu}$ = 1,206 (0,631), $\hat{\rho}$ = 0,4296 (0,037); Солоу (17): $\hat{A}$ = 0,1146 (0,026), $\hat{\nu}$ = 0,989 (2,747), $\hat{\alpha}$ = – 2,5189 (– 0,244), $\hat{\beta}$ = 0,1181 (0,034), $\hat{\gamma}$ = – 1,0074 (–0,074);

Джири (18): $\hat{A}$ = 8,4898 (0,002), $\hat{\alpha}$ = 0,2609 (0,565), $\hat{\beta}$ = 0,0385 (0,0001), $\hat{K}^*$ = 6,3711 (0,077), $\hat{L}^*$ = 0,00063 ($1,3 \times 10^{-6}$).

Показатели качества оценивания капитальных ПФ для реальных данных и параметры, определяющие динамику эффективного капитала, приведены в табл. 7. Эти показатели существенно лучше у функций Солоу и Джири, причём из них трудно выбрать лучшую.

Для однородных моделей производства среднегодовая норма амортизации равна 5,8%. (КД) и 7,8% (ПЭЗ), а в неоднородных моделях Солоу и Джири норма амортизации практически одинакова и равна 15%. Скорость освоения инвестиций представляется параметром ξ. Полученные значения ξ для всех классов ПФ близки или равны 1. Это означает, что инвестиции осваиваются в течение того же периода и свидетельствуют о том, что в новой экономике России практически не ведется промышленное капитальное строительство.

[3] Функция Джири введена как функция полезности, порождающая достаточно простой, но эффективный для применения класс функций спроса Клейна Рубина (Klein, Rubin, 1947).

Динамика скорректированного номинального K_t и эффективного $\hat{K}_t$ капитала для рассмотренных классов ПФ представлена в табл. 8. При переходе от функции Кобба–Дугласа к более широким классам функций значения эффективного капитала уменьшаются, но динамика стабилизируется, несмотря на рост коэффициентов амортизации. Оценки эффективного капитала по функциям Солоу и Джири близки. Они показывают, что из наличных производственных фондов России в последние годы реально работает лишь около половины.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили метод построения стандартных производственных функций, один из факторов которых – эффективные производственные фонды – в нестандартной для методологии ПФ ситуации. Вместо динамики фондов на периоде наблюдения заданы производственные инвестиции. Наш подход концептуально прост. Он основан на использовании стандартной динамики производственных фондов, определяемой на промежутке наблюдения начальным капиталом, режимом амортизации фондов и характером запаздывания освоения инвестиций. При этом возникают дополнительные параметры (к параметрам оцениваемой ПФ) – начальное значение эффективного капитала и показатели, определяющие амортизацию фондов и режим освоения инвестиций. Существенно, что мы вводим и оцениваем динамику эффективных, а не формальных (балансовых) фондов. Наша модель в предельном случае, когда инвестиции осваиваются без существенной задержки (в течение периода инвестирования) и фонды амортизируются за один период, совпадает с инвестиционной моделью. Этот вариант совпадения проясняет характер наивности простого перехода от фондов (запасов) к инвестициям (потокам).

Задача оценивания расширенного набора параметров методом наименьших квадратов является существенно нелинейной и сложной даже для простейшего класса функций Кобба–Дугласа. Мы построили и реализовали для минимизации невязки специальный вариант метода продолжения по параметру, позволяющий решать сложные задачи оптимизации. В представленных здесь тестовых и реальном примерах предложена относительно несложная двухпериодная модель освоения инвестиций. Однако эта модель оказалась достаточной для демонстрации известного факта отсутствия в России последнего двадцатилетия существенных капитальных инвестиций.

Для тестовых примеров 1 и 2 строилась простейшая однородная функция Кобба–Дугласа по модельной информации, рассчитанной по более сложным и содержательным функциям ПЭЗ и Солоу. Эти функции, а также неоднородная функция Джири использовались в примере 3 как модели реальной экономики России периода 2000–2008 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Айвазян С.А., Енюков Е.С., Мешалкин Л.Д. (1985): Прикладная статистика: Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика.

Айзенберг Н.И., Солонина З.В. (2007): Методика экспериментального анализа формул расчета индексов цен // *Вестник ИрГТУ*. № 4 (32).

Бард И. (1979): Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика.

Бессонов В.А. (1998): О смещениях в оценках роста российских потребительских цен // *Экономический журнал ВШЭ*. № 1.

Бессонов В.А. (2002): Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике. В кн.: Бессонов В.А., Цухло С.В. *Анализ динамики российской переходной экономики*. М.: ИЭПП.

Бессонов В.А., Воскобойников И.Б. (2006): Динамика основных фондов и инвестиций в российской переходной экономике. М.: ИЭПП, Научные труды, № 97.

Воскобойников И.Б. (2004): О корректировке динамики основных фондов в российской экономике // *Экономический журнал ВШЭ*. № 1.

Горбунов В.К., Ледовских А.Г. (2008): Производственные функции многих переменных с переменной эластичностью замещения // *Современные технологии. Системный анализ*. Моделирование. Спец. выпуск.

Горбунов В.К., Львов А.Г. (2009): Построение трехфакторной производственной функции с переменными эластичностями замещения // *Труды Средневолжского математического общества*. № 1 (11).

Демиденко Е.З. (1989): Оптимизация и регрессия. М.: Наука.

Демченко С.К. (2006): Теории экономического роста во взаимосвязи с концепцией мультипликатора // *Проблемы современной экономики*. № 1(17).

Зоркальцев В.И. (1996): Индексы цен и инфляционные процессы. Новосибирск: Наука.

Кейн Э. (1977): Экономическая статистика и эконометрия. Вып. 2. М.: Статистика.

Клейнер Г.Б. (1986): Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика.

Лукашин Ю., Рахлина Л. (2004): Производственные функции в анализе мировой экономики // *Мировая экономика и международные отношения*. № 1.

Львов А.Г. (2010): Построение производственных функций с переменной эластичностью замещения // *Журнал экономической теории*. № 1.

Мхитарян В.С., Архипова М.Ю., Архипов В.Ю. (2006): Нелинейный регрессионный анализ в системе Statistica и SSP. М.: МЭСИ.

Ортега Дж., Рейнболдт В. (1975): Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир.

Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л. (1984): Производственные функции в экономическом анализе. Вильнюс: Минтис.

Резников А.П. (1976): Обработка накопленной информации в затрудненных условиях. М.: Наука.

РСЕ (2009): Российский статистический ежегодник. 2009: Стат. сб. М.: Росстат.

Сюань Я. (2007): Факторы и стратегии развития малого промышленного бизнеса (на примере России и Китая): автореферат дис. … канд. экон. наук: 08.00.05.

Терехов Л.Л. (1974): Производственные функции. М.: Статистика.

Ханин Г.И., Фомин Д.А. (2007): Потребление и накопление основного капитала в России: альтернативная оценка // *Проблемы прогнозирования*. № 1.

Geary R.C. (1950): A Constant-Utility Index of the Cost of Living // *The Rev. of Econ. Studies*. Vol. 18. № 1.

Hackman S. T. (2008): Production Economics: Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives. Berlin: Springer.

Klein L.R., Rubin H. (1947): A Constant-Utility Index of the Cost of Living // *The Rev. of Econ. Studies*. Vol. 15. № 2.

Nocedal J., Wright S. (2006): Numerical Optimization (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering): Springer.

Pollak R.A., Wales T.J. (1969): Estimation of the Linear Expenditure System // *Econometrica*. Vol. 37. № 4.

Поступила в редакцию
12.11.2010 г.

The Construction of Production Functions using Investment Data

V.K. Gorbunov, A.G. Lvov

The method of construction of "capital" production functions is offered for the case when one of the function's factors is the costs of used (effective) funds, and the costs being formed using the information on funds investments in an interval of observation. Thus also effective funds, regimes of their depreciation and development of investments are estimated.

Keywords: capital and investment production functions, effective funds, depreciation, lag of investments, parameter estimation, parameter continuation.