

ТЕОРЕМА ДОПУСТИМОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ТРАНСПОРТИРОВКЕ СМЕСЕЙ

В. И. РУБЛИНЕЦКИЙ

(Харьков)

Некоторые прикладные задачи сводятся к транспортной задаче линейного программирования; при этом количество перевозимого продукта характеризуется векторной, а не скалярной величиной, т. е. продукт можно считать смесью, состав которой определяется компонентами вектора.

Обозначая, как принято в транспортной задаче, через a_i мощность i -го поставщика, b_j емкость j -го потребителя, c_{ij} стоимость перевозки единицы продукта из i -го пункта в j -й и полагая, что α_{ik} — удельное содержание k -го продукта в смеси, производимой i -м поставщиком, $\sum_k \alpha_{ik} = 1$, β_{jk} — удельное содержание k -го

продукта в смеси, нужной j -му потребителю, $\sum_k \beta_{jk} = 1$, можно следующим образом записать задачу о транспортировке смесей

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_j x_{ij} &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_i \alpha_{ik} x_{ij} &= b_j \beta_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, l, \\ x_{ij} &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Сформулированная задача может быть решена как общая задача линейного программирования (например, симплекс-методом). Однако хотелось бы, учитывая специальный характер задачи, получить легко проверяемые необходимые и достаточные условия существования решения. Такие условия позволили бы с легкостью распознавать неразрешимые задачи и даже при необходимости «исправлять» их, превращая в разрешимые при некоторых измерениях в исходных данных.

Нам удалось найти необходимые и достаточные условия того, что имеется хотя бы одно решение задачи о транспортировке смесей, состоящих из двух компонент.

Назовем одну из двух компонент основным продуктом, а другую — примесью. Изменим нумерацию поставщиков так, чтобы номера возрастали по мере возрастания доли основного продукта в смесях, производимых данными поставщиками; аналогично изменим нумерацию потребителей.

Затем обозначим через $A(n)$ общее количество примеси в n единицах продукта при условии, что эти n единиц набираются следующим образом: берут n единиц у первого поставщика, если он производит достаточно много смеси (если $a_1 \geq n$). В противном случае (если $a_1 < n$) берут весь продукт у первого поставщика, а недостающие $n - a_1$ единиц — у второго. Если не хватает мощности второго поставщика, то недостающее количество добывают у третьего и т. д. в порядке возрастания номеров. Другими словами, $A(n)$ — это общее количество примеси в n единицах продукта, производимого поставщиками в наиболее богатого примесью. Аналогично через $B(n)$ обозначим общее количество примеси в n единицах продукта, нужного потребителям и содержащего наибольшую долю примеси. Через $\bar{A}(n)$ обозначим величину, аналогичную $A(n)$, но при условии, что n единиц продукта набираются, начиная с последнего поставщика, в порядке убывания номеров.

Теперь может быть сформулирована и доказана следующая теорема допустимости.

Теорема. Задача (1), (2) о транспортировке смесей из двух компонент имеет одно решение тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j, \quad (3)$$

$$A\left(\sum_{j=1}^s b_j\right) \geq B\left(\sum_{j=1}^s b_j\right), \quad s = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4)$$

$$A\left(\sum_{j=1}^n b_j\right) = B\left(\sum_{j=1}^n b_j\right). \quad (5)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть (4) нарушено для какого-либо $s = s'$. Тогда первым s' потребителям не хватит примеси, даже если они получают самый богатый примесью продукт; следовательно, задача не имеет решения. Необходимость условия общего баланса (3) и условия баланса по примеси (5) очевидны.

Достаточность. Если $A(b_1) = B(b_1)$, то эти b_1 самых богатых примесью единиц направляются первому потребителю, а в оставшейся задаче меньшего размера по-прежнему выполняются условия (3) — (5). Если же $A(b_1) > B(b_1)$, то $\bar{A}(b_1) < B(b_1)$, иначе нарушается условие (5). Смешивая λb_1 самого богатого примесью продукта с $(1 - \lambda)b_1$ самого бедного примесью продукта ($0 \leq \lambda \leq 1$), можно получить любое количество примеси между $A(b_1)$ и $\bar{A}(b_1)$, в том числе и $B(b_1)$. Затем первому по-

требителю направляются те b_1 единиц продукта, смесь которых обеспечила равенство количества примеси; после этого снова остается задача меньшего размера, где выполняются условия (3) — (5). Оставшаяся задача меньшего размера решается аналогично, пока не будет распределен весь продукт, т. е. получено некоторое решение. Теорема доказана.

К сожалению, аналогичная простая теорема в задаче о транспортировке смесей более чем двух компонент не имеет места.

Поступила в редакцию
20 I 1968