ПЛАН КАК МНОГОЦЕЛЕВАЯ ЗАДАЧА

Э. Е. БЕЛИЦКИЙ

(Москва)

В ряде случаев оптимизация представляет собой способ отыскания компромисса между различными, вообще говоря, не взаимозаменяемыми и не всегда ясно осознаваемыми целями. В настоящее время такая оптимизация обычно осуществляется при помощи теоретико-игровых моделей и моделей равновесия.

Для большинства моделей оптимизации предполагается наличие системы оценок, полученной в известной степени независимо от данной модели. Вместе с тем для анализа решений, которые принимаются самостоятельно, необходимо предположить, что они определяются внутренними условиями задачи. Полезность такого подхода рассматривается в дальнейшем. Для его реализации в этих случаях удобно отказаться от использования скалярной меры качества изменений и процессов и обратиться к векторной харатеристике. Рассмотрим, какое изменение вносит использование векторной меры качества в формулировку и методы решения задачи. Введение векторной характеристики качества принимаемых решений или происходящих изменений для процесса (программы) предполагает использование различных способов упорядочения этих характеристик. В частности, могут быть заданы следующие условия.

Допустим, что y_0 и y' — m-мерные векторы из n-мерного векторного пространства Y. Компоненты этих векторов обозначим соответственно ϑ_i^0 и ϑ_i', $i = 1, \ldots, m$. Тогда положим

1) $y_0 \geqslant y'$, если $\vartheta_i^0 = \vartheta_i'$ и для некоторых i, $i = k$, $\vartheta_k^0 > \vartheta_k'$,

$\left.\begin{array}{l} 2)\ y_0 = y' \\ 3)\ y_0 > y' \end{array}\right\}$ при тех же условиях.

Каждое условие вытекает из содержательной интерпретации конкретной задачи. Это условие можно считать критерием оценки.

Для векторных задач максимизации понятие максимума заменяется понятием эффективной точки. В экономико-математической литературе используется понятие эффективного вектора или тождественное ему понятие экстремальной точки. Эффективным называется вектор y_0 из пространства Y такой, что для любого $y' \in Y - y_0 \geqslant y'$. Смысл этого правила заключается в том, что ни одна компонента вектора не может быть увеличена без изменения другой. Очевидно в этом случае решение можно считать экстремальным. Это правило обеспечивает получение оценок замены, которые показывают, какое увеличение одной компоненты произойдет при уменьшении на единицу другой компоненты (при малых изменениях). Изменения, происходящие в этих пропорциях, считаются равноценными (по внутренним условиям). Последнее формулируется так: если p — вектор оценок замены, соответствующий данному эффективному вектору y_0, то $y_0 p \geqslant y' p$ для любого другого вектора из данного множества.

Плановое задание на практике рассматривается как векторная характеристика деятельности хозяйственной единицы. Действительно: 1) план считается выполненным, только если достигнут плановый уровень всех показателей; 2) план считается перевыполненным, если достигнут плановый уровень всех показателей и хотя бы по одному этот уровень превышен; 3) отдельные задания (показатели) плана не являются взаимозаменяемыми с точки зрения плановых органов, так как они рассчитаны в разных задачах. Они не вытекают непосредственно из условий задачи оптимизации деятельности хозяйственной единицы.

Для логического анализа характера решений, которые будут приниматься самостоятельно хозяйственными руководителями и работниками, полезно разделить условия плановой задачи на внешние и внутренние. Такое разделение не ново в экономической литературе. Например, некоторые авторы предлагают при оценке результатов деятельности хозяйственной единицы элиминировать влияние «не зависящих» от их деятельности обстоятельств.

Процесс планирования «сверху» можно представить как процесс корректировки «встречных планов». Такое представление хорошо согласуется с идеей оптимизации. Вполне логично предположить, что хозяйственная единица стремится добиться максимума, допускаемого внутренними условиями. Это предположение становится фактом, если внешние условия на первом этапе вообще исключаются из рассмотрения. Появление новых условий в виде внешних требований приведет к компромиссному решению.

Будем рассматривать плановую задачу как многоцелевую программу. Это означает, что имеется много различных возможностей. Нет удовлетворительного способа определить, какая из возможностей более предпочтительна. Поэтому необходимо найти вариант реализации максимума каждой из возможностей. Решением для многоцелевой программы является *годная* программа. Годной называется программа выпуска, предусматривающая такое использование ресурсов, при котором увеличение одной компоненты вектора выпуска невозможно без уменьшения другой его компоненты. Таким образом, в результате составления годной программы должен быть получен эффективный вектор выпуска, т. е. экстремальное решение, имеющее векторную характеристику. Смысл применения такого подхода к задаче составления плана хозяйственной единицей заключается в следующем.

1. «Внутренние» условия можно рассматривать «независимо» от внешних требований, включая оценки.

2. Годная программа позволяет представить, какие решения будут приняты хозяйственными единицами при тех или иных внешних требованиях. При необходимости можно принять надлежащие меры, исключающие нежелательные решения (например, назначить расчетные цены). Формально это требование означает: для вектора выпуска $y_0 \in Y$ и вектора оценок p должно выполняться условие $y_0 p \geqslant y'p$ для любого $y' \in Y$. Это исключает «сползание» к другим решениям *. Подход с позиции многоцелевого программирования позволяет использовать минимальное количество начальных условий, что способствует устойчивости плановых решений. Действительно, обычно необходимо до начала планирования знать план выпуска или цены, или то и другое вместе. При многоцелевом подходе составляется до известной степени случайный эффективный план. Затем по критерию эффективности он может быть преобразован в другой эффективный план. Следовательно, имеется известный диапазон преобразований. При невозможности использовать эффективный план из-за неоптимальности предыдущих решений, можно получить систему искусственных цен (или других мер), при помощи которых хозяйственная единица будет побуждаться принять оптимальное решение. Наконец, для годной программы возможно получить систему оценок, характеризующих улучшение внутренней структуры единицы и позволяющих принять обоснованное решение.

Перейдем к интерпретации этих оценок. Будем рассматривать многоцелевую программу как задачу нелинейного программирования. В общем случае возникает векторная задача максимизации. Однако более удобно начать рассмотрение с обычной задачи на максимум. Последняя имеет наглядную интерпретацию. Предположим, что необходимо изыскать способы увеличения выпуска одного из продуктов при условии, что выпуск других продуктов нельзя сократить. Согласно данному выше определению, отыскивается способ «улучшения» программы. Интуитивно ясно, что для этого надо высвободить ресурс, оказавшийся дефицитным в исходной программе. Высвобождение ресурса может быть достигнуто изменением маршрута изготовления детали, порядка запуска, технологического процесса. В математической задаче все эти изменения могут быть представлены как новые «способы производства».

Запишем условия задачи. $z_k = f_k(x_{ij}) \to \max$ при $f_i(x_{ij}) = z_i^0$ для $i \neq k$, где z_i — компоненты вектора выпуска; x_{ij} — «интенсивности» применения процессов; $f_i(x_{ij})$ — вектор-функция выпуска продукции. Возможны изменения структурных коэффициентов. Как известно, одним из способов решения этой задачи является построение функции Лагранжа, для которой могут быть сформулированы необходимые и достаточные условия существования экстремума. При этом локальный максимум является и глобальным.

Функция Лагранжа для задачи, сформулированной выше, имеет вид

$$L_k(x, p) = f_k(x) \sum_i p_i [g(x) - z_k^0]. \tag{1}$$

Строго для этой задачи необходимо указать ряд дополнительных условий, например, необходимо оговорить трансформируемость высвобождаемых ресурсов (иначе они получат нулевую оценку, т. е. не доставят выигрыша максимизируемой функции). Эти условия являются жесткими, однако, есть возможность их ослабить

$$\sum_i p_i [g(x) - z_k^0] = F(x), \tag{2}$$

где $F(x) \geqslant 0$ — вектор-функция неиспользуемых ресурсов.

Тогда очевидным условием существования глобального максимума функции Лагранжа является минимизация неиспользуемых ресурсов.

Оптимальное решение (x^0, p^0) интерпретируется как седловая точка функции. Следовательно, x^0 максимизирует функцию среди всех x при данном p^0 или p^0 минимизирует функцию среди всех p при данном x^0. p^0 — вектор оценок, характеризующих приращение, доставляемое функции выпуска единицей ресурса при использовании ресурса до предела. В этом случае необходимое условие существования макси-

* Конечно, предполагается, что максимизация суммы имеет смысл для хозяйственной единицы.

мума функции Лагранжа

$$\frac{\partial L_k}{\partial x_{ik}} = \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_{ik}} - \lambda \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}, \tag{3}$$

откуда

$$\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_{ik}} = \lambda \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}, \tag{4}$$

где λ — компоненты вектора p.

Очевидно, $\lambda = 0$, если

$$\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_{ik}} = 0, \quad \text{либо} \quad \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{для } x > 0). \tag{5}$$

Если выполняется равенство (5), то λ определяет «крутизну» изменения функции в экстремальной точке («вклад» ресурса). В задаче многоцелевого программирования операция максимизации осуществляется для каждой из компонент выпуска. Результатом является получение эффективного вектора выпуска или годной программы. В этом случае имеются две системы оценок, определенные исключительно внутренними условиями задачи (рациональностью технологических выборов). Одна система оценок характеризует ресурсы с точки зрения тех изменений, которые они позволяют произвести в выпуске продуктов; вторая — изменения в выпуске одного продукта, возможные при отказе от единицы другого продукта. Эти оценки интерпретируются как оценки заменяемости продуктов, т. е. характеризуют равноценные замены (с точки зрения использования имеющихся возможностей). Окончательное выражение для многоцелевой программы (после соответствующих преобразований) имеет вид

$$L = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(z_j) - \lambda F(x_i). \tag{6}$$

Для интерпретации этого результата удобно рассмотреть векторную задачу максимизации, где $G(x)$ — вектор-функция, компоненты которой являются выпуклыми функциями по x; $F(x)$ — имеет тот же смысл, что и в (6).

Примем как доказанное утверждение, что если x^0 — эффективная точка, т. е. $G(x^0) \geqslant G(x)$ для любых $x \in X$, то существует вектор $c(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, для которого $\sum_{j=1}^{n} \gamma_i = 1$ и $k(x) = (c, G(x))$ достигает максимума для x^0. Этот результат можно проинтерпретировать следующим образом: вектор оценок, характеризующий отношения замены продуктов — компонент эффективного вектора — максимизирует суммарный результат производства.

Для векторной задачи максимизации имеем

$$L(x, p, c) = (c, G(x)) + (p, F(x)) \tag{7}$$

и решением является седловая точка функции. Это равносильно выполнению условий

$$L(x, p^0, c^0) \leqslant L(x^0, p^0, c^0) \leqslant L(x^0, p, c^0). \tag{8}$$

Вектор p имеет тот же смысл, что и в (2). Таким образом, для эффективного вектора выпуска существует система оценок, позволяющая вычислить суммарный результат исключительно по технологическим возможностям. Все ресурсы получают оценку в продуктах, для выпуска которых они используются. Между этими двумя системами оценок существует строгое взаимоотношение; для данного эффективного вектора $\{p_0, c_0\}$ — седловая точка. Используя эти системы оценок, можно определить, какие решения будут приняты самостоятельно ответственными за принятие решений. Проанализировав общие черты и смысл многоцелевой программы, перейдем к конкретному ее составлению на примере станкостроительного завода, причем рассмотрим только первый этап: получение экстремума по внутренним условиям.

Обычная оптимизация используется здесь как вспомогательный прием: 1) в качестве ограничений принимаются долгосрочные ресурсы, в данном случае — мощности; 2) в целевой функции максимизируется выпуск одной из деталей. Практически лучше начинать с детали, обладающей признаками универсальности. Начинать с деталей (а не конечной продукции) удобнее во многих отношениях. Во-первых, число степеней свободы в этом случае значительно больше. Во-вторых, попутно можно установить согласованную работу между звеньями, принимающими окончательные решения.

Предполагается, что для выпуска почти каждой детали может быть использован не единственный технологический процесс (возможно чередование запусков, использование различного оборудования и схем обработки и т. п.). Такие технологические способы описываются матрицей $A(a_{ij})$, которая имеет следующую особенность. Коэффициенты с номерами столбцов от 1 до n характеризуют «расход» оборудования на изготовление детали $i+1$ в j-м процессе. Коэффициенты от $n+1$ до k характеризуют выпуск деталей в j-м процессе единичной интенсивности. Вектор ограничений разделен на две части. «Верхняя» часть вектора (b) отведена под запас мощностей, а «нижняя» (z) — под фиксированные выпуски. В качестве коэффициентов целевой функции принято количество деталей (целевых), которые могут быть получены, если данный единичный процесс использовать вместо выпуска фиксированной детали на производство целевой. Окончательный вид матрицы

$$
\begin{array}{llllll}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \ldots a_{1n} & & & b_1 \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \ldots a_{2n} & & & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots \\
a_{m1}, & a_{m2}, & a_{m3} \ldots a_{mn} & & & b_m \\
 & & & a_{m+1,1}, & a_{m+1,2} \ldots & z_1 \\
 & & & a_{m+2,1}, & a_{m+2,2} \ldots & z_2 \\
 & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & a_{m+m,1}, & a_{m+m,2} \ldots & z_m \\
[c_1, & c_2, & c_3 \ldots -c_1 - c_2 - c_3 & & & z_k]
\end{array}
$$

В векторно-матричных обозначениях имеем

$$Bx \geqslant b, \quad Ax = z, \quad z_k = cx \to \max,$$

где B — подматрица матрицы A.

После решения аналогичных задач для всех k определим оценки замены для каждой детали. Такая задача может быть записана $z_k\lambda \to \max$ при $\Sigma_k \lambda = 1$.

Двойственное решение (которое для краткости опускается) даст оценка замены ресурсов в процессе. Аналогичная процедура проводится для комплектов деталей. При этом балансируется выпуск, минимизирующий неиспользуемые ресурсы. Наконец, оптимизации подвергается выпуск готовых деталей. Результатом является получение годной (с точки зрения внутренних условий) программы. Эта программа представляет собой исходную позицию, изменение которой может быть оценено надлежащим образом, в частности, если понадобятся расчетные цены для согласования целей такой программы с целями плана. Так, лимиты на краткосрочные ресурсы позволяют получить оценку «упущенных возможностей». Нельзя забывать, что хозяйственная единица может добиваться осуществления этих возможностей. Хозяйственные руководители, оптимизируя результат, будут стремиться минимизировать затраты, если они в этом заинтересованы.

В данной работе не может быть детально рассмотрен процесс «стыковки» плана встречного с планом-заданием. Однако для наглядности рассмотрим следующий пример. Рост выпуска продукции (что в данных ценах равносильно росту объема реализованной продукции) может привести к росту прибыли, ее падению или не вызвать никаких изменений.

В первом случае необходимо предвидеть возможность излишнего выпуска. Во втором — необходимо исключить альтернативные решения. В третьем может оказаться достаточным моральный стимул (сознание важности выполнения плановых заданий). Таким образом, окончательный план представляет собой компромисс между реальными условиями функционирования единицы и требованиями народнохозяйственного оптимума, исчисленного на базе «технических данных». Основной результат построения встречного плана — получение оценок, которыми можно руководствоваться при внесении изменений в окончательный план.

Описанный в данной работе подход пригоден для постановки локальных задач в условиях отсутствия единого оптимального плана. Он оказывается полезным и для некоторых задач, в которых качество выхода оценивается набором характеристик.

Поступила в редакцию
30 VI 1969