

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ СОБСТВЕННЫХ И ЗАЕМНЫХ ОБОРОТНЫХ СРЕДСТВ ПРЕДПРИЯТИЯ

П. Г. БУНИЧ, В. Л. ПЕРЛАМУТРОВ, Л. Х. СОКОЛОВСКИЙ

(Москва)

1. Введение. Одна из наиболее ответственных задач экономической работы на предприятии связана с планированием оборотных средств. Это объясняется тем, что движение оборотных средств практически (за исключением капитальных вложений) связано со всеми звеньями хозяйственной деятельности предприятия: производством, снабжением, сбытом; банковскими операциями.

Вопрос о планировании оборотных средств переплетается с вопросом о планировании краткосрочных кредитов, или, иными словами, с задачей о планировании соотношения между собственными и заемными оборотными средствами предприятия. Хотя эта проблема обсуждалась в специальной литературе, нигде не дано четкого понятия оптимального соотношения, и речь, как правило, идет о некоем неопределенном варианте, лучше по сравнению с существующим. Так, в [1] говорится, что доля собственных средств должна быть настолько значительной, чтобы невыполнение плана по их приросту или их отвлечение из оборота оказывало существенное влияние на финансовое состояние предприятия. Другая точка зрения состоит в том, что чем выше доля кредитов в формировании оборотных средств, тем выше эффект использования оборотных средств. Наконец, есть мнение, что предприятие при формировании оборотных средств должно полностью использовать все собственные ресурсы, а в недостающей части — кредиты банка.

2. Постановка задачи. В настоящее время используемые предприятием ресурсы стали платными; из прибыли оно вносит в бюджет плату за основные фонды и оборотные средства. Поэтому необходимо учитывать общие издержки на формирование оборотных средств, т. е. сумму платы за них в бюджет и процентов за кредит. Эти издержки и есть плата предприятия за создание своих оборотных средств. Естественно, что эти общие издержки будут зависеть от соотношения собственных и заемных средств. Каким же должно быть это соотношение при рациональном формировании оборотных средств?

Так как рассматриваемая нами ситуация включает случайные факторы, то под общими издержками будем понимать средние общие издержки, т. е. математическое ожидание общих издержек формирования оборотных средств.

При рациональном формировании оборотных средств соотношение между собственными и заемными средствами должно зависеть от величины процентной ставки за кредит и величины платы за создание собственных оборотных средств. Предполагаем известными: величину $\delta \cdot 100\%$ — процентной ставки за кредит и h — издержки с одного рубля, связанные с использованием собственных и приравненных к ним ресурсов, имеющих-

ся в распоряжении предприятия в качестве оборотных средств. В частности, h может быть плата в государственный бюджет за каждый рубль собственных оборотных средств. В дальнейшем связанные с этим издержки назовем платой за собственные (оборотные) средства. Возможны и другие интерпретации величины h . Например, если банк будет выплачивать предприятию процент в размере $\alpha \cdot 100\%$ за хранение средств предприятия в банке, а плата за использование собственных ресурсов в виде оборотных средств будет равна $\beta \cdot 100\%$, то h , очевидно, будет равно издержкам, которые несет предприятие за создание собственных оборотных средств (вместо того, чтобы получать проценты от банка). В этом случае $h = \alpha + \beta$. Вполне естественно, что если h существенно больше δ , то предприятие заинтересовано взять как можно больший кредит и снизить таким образом общие издержки на формирование оборотных средств; если же h существенно меньше δ , появляется заинтересованность в максимально возможном увеличении доли собственных средств.

Соотношение между собственными и заемными средствами в большой степени определяется движением платежей и поступлений денежных средств. К платежам относятся обязательства предприятия перед поставщиками, банком, государственным бюджетом, рабочими и служащими, транспортными организациями и т. п., а к поступлениям денежных средств — поступления от покупателей продукции, банка, министерства и т. п. Так как и платежи, и поступления денежных средств носят, вообще говоря, случайный характер [2], то можно сказать, что соотношение между собственными и заемными средствами должно зависеть от статистических характеристик процессов платежей и поступлений средств на предприятие.

Финансирование оборотных средств — процесс динамический. В течение года или квартала предприятие несколько раз принимает решение о финансировании оборотных средств. Поэтому при разработке политики управления оборотными средствами и, в частности, при определении соотношения между собственными и заемными средствами необходимо учитывать полные издержки за весь период планирования хозяйственной деятельности предприятия, например, за год.

Все сказанное выше позволяет следующим образом сформулировать задачу определения оптимального соотношения между собственными и заемными оборотными средствами: как исходя из известных значений h , δ , уровня оборотных средств на начало года и статистических характеристик процессов платежей и поступлений выбрать в каждом периоде средний уровень собственных оборотных средств, чтобы общие средние издержки формирования оборотных средств за весь интервал планирования были минимальны.

В качестве собственных средств предприятия в каждый момент времени практически выступают свободные денежные средства, находящиеся на счетах предприятия в банке, в кассе и чеки из чековых книжек, т. е. главным образом выручка от реализации продукции. Этими средствами предприятие не может варьировать: не может увеличить или уменьшить их размер в зависимости от своей потребности в ресурсах. Величина этих средств определяется не потребностями предприятия, а ходом поставок, производства и реализации продукции. При составлении годового плана оборотных средств предприятию планируется прирост этих средств в связи с увеличением объема производства или по каким-либо иным причинам. Практически источником прироста является прибыль предприятия, созданная им в прошлом году, а также прибыль других предприятий министерства, перераспределяемая им по своему годовому отчету. Для излагаемой ниже модели важно лишь то, что этот прирост ограничен сверху

некоторой известной величиной, зависящей, вообще говоря, от конкретных условий хозяйствования — общей величины прибыли и нормативов ее отчислений в бюджет, фондов экономического стимулирования и т. д.

К сказанному добавим следующее. 1) В последние годы широкое распространение получило кредитование по обороту. Оно несколько изменило порядок формирования оборотных средств, но это не снимает сформулированной выше задачи, так как в этом случае кредиты банка замещают часть собственных средств предприятия, т. е. практически часть собственных средств предприятия переводится на спецсудный счет в банке и резервируется для оплаты только тех платежей, которые относятся к оборотным средствам. Плата за эти средства (в пределах суммы, изъятой из собственных оборотных средств) взимается, как и плата за оборотные средства, и потому издержки предприятия в этом случае равны издержкам на формирование собственных оборотных средств. 2) Особым источником формирования оборотных средств является кредиторская задолженность, возникающая вследствие более поздней (по сравнению с фактическим прибытием) оплаты приходящих поставок. Однако ее можно считать точно таким же финансовым обязательством предприятия, как и другие платежные обязательства, и учесть при статистической характеристике платежей. Точно таким же образом можно в исходной информации учесть и дебиторскую задолженность, т. е. обязательства других предприятий перед данным, выступающим в роли поставщика.

3. Динамическая модель в случае выдачи кредита на один период.

1. Рассмотрим некоторый интервал планирования, например год, состоящий из n последовательных периодов. В каждом периоде у предприятия имеются финансовые обязательства — платежи, которые необходимо выполнить. Будем считать, что суммарная величина всех платежей k -го периода ξ_k — случайная величина, распределенная в интервале $(0, A_k)$ и имеющая функцию распределения $F_k(x)$, причем величины $\{\xi_k\}$, $k = 1, \dots, n$, взаимно независимы. В течение k -го периода на предприятие поступают средства от реализации готовой продукции; предполагается, что суммарный размер этих поступлений η_k является случайной величиной, распределенной в интервале $(0, B_k)$ с функцией распределения $G_k(x)$, $k = 1, \dots, n$. Величины $\{\eta_k\}$ взаимно независимы и не зависят от величин $\{\xi_k\}$. Поступления денежных средств могут быть либо в начале периода (с вероятностью p_k), либо в конце периода — с вероятностью $q_k = 1 - p_k$. В первом случае платежи совершаются после поступления средств, во втором случае — до их поступления.

Пусть к началу k -го периода на предприятии имеется γ_k собственных оборотных средств, $\gamma_k \geq 0$. Известно, что в начале каждого периода предприятие может пополнить этот запас до некоторого уровня S_k , причем размер этого пополнения ограничен величиной L_k , так что

$$\gamma_k \leq S_k \leq \gamma_k + L_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где S_k — уровень собственных (оборотных) средств в k -м периоде. Это определение несколько неточно, так как в том случае, когда средства от реализации поступают в начале k -го периода, величина собственных средств в этом периоде будет $S_k + \eta_k$. Но поскольку решение о пополнении всегда принимается до поступления средств от реализации (даже если последние приходят в начале периода), мы сохраним за величиной S_k название уровня собственных средств.

Если в начале k -го периода поступает η_k средств от реализации продукции, то плата за оборотные средства в этом периоде составит $h(S_k + \eta_k)$. Если же средства от реализации поступают в конце периода, то в

формировании оборотных средств данного периода они не участвуют, и плата за оборотные средства этого периода будет hS_k .

Таким образом, если S_k — уровень собственных средств в k -м периоде, а η_k — размер поступлений, то величина собственных средств, которыми в этом периоде располагает предприятие, равна $S_k + \eta_k$ с вероятностью p_k и S_k с вероятностью q_k . Если этих средств достаточно для выполнения финансовых обязательств k -го периода, то необходимые платежи совершаются, а остаток собственных средств переходит в виде запаса γ_{k+1} оборотных средств к началу следующего $(k+1)$ -го периода. Если же собственных средств не хватает, то (в предположении об обязательности выполнения платежей) предприятие обращается за кредитом в банк (имеется в виду кредит на совокупную потребность в оборотных средствах), причем размер кредита таков, чтобы в точности покрыть нехватку средств. Будем далее считать, что кредит вместе с соответствующими процентами должен быть обязательно возвращен в банк в следующем периоде; иначе говоря, задержка в возвращении кредита не допускается. Следовательно, если z_k — размер банковской ссуды в k -м периоде, то к обязательствам ξ_{k+1} следующего $(k+1)$ -го периода прибавляется $(1 + \delta)z_k$. Величина δz_k равна, очевидно, издержкам, связанным с кредитом k -го периода, но издержки эти естественно относить к $(k+1)$ -му периоду, в котором кредит должен быть возвращен. В несколько особых условиях находится последний, n -й период: к издержкам этого периода относятся не только плата за оборотные средства и издержки кредита, взятого в $(n-1)$ -м периоде, но и издержки, связанные с кредитом, взятым в самом n -м периоде.

Обозначим через $W_k(S_k, z_{k-1})$ средние полные издержки k -го периода при условии, что уровень собственных средств в этом периоде равен S_k , а кредит в $(k-1)$ -м периоде был равен z_{k-1} . Тогда

$$W_k(S_k, z_{k-1}) = h(S_k + p_k b_k) + \delta z_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$W_n(S_n, z_{n-1}) = h(S_n + p_n b_n) + \delta z_{n-1} + \delta z_n, \quad (3)$$

где

$$b_k = \int_0^{B_k} y dG_k(y), \quad k = 1, \dots, n, \quad (4)$$

— средний размер суммы поступлений средств от реализации в k -м периоде.

Предположим, что в первом периоде уровень собственных средств равен S_1 , во втором периоде — $S_2, \dots$, в n -м периоде — S_n . Вектор $S = (S_1, \dots, S_n)$ будем называть политикой формирования оборотных средств в рассматриваемом интервале времени. Средние полные издержки $W(S_1, \dots, S_n)$ формирования оборотных средств, связанные с политикой $S = (S_1, \dots, S_n)$,

$$W(S_1, \dots, S_n) = \sum_{k=1}^n W_k(S_k), \quad (5)$$

где

$$W_k(S_k) = E\{W_k(S_k, z_{k-1})\}, \quad (6)$$

а E означает осреднение по всем возможным значениям кредита z_{k-1} в $(k-1)$ -м периоде, $k = 1, \dots, n-1$. Для последнего периода необходимо, кроме того, осреднить по возможным значениям z_n .

Естественно считать, что в качестве исходных данных для планирования заданы $\bar{\gamma}_0$ — величина собственных оборотных средств к началу первого периода (начальный запас) и $(1 - \delta)\bar{z}_0$ — задолженность по кредиту к началу первого периода; при этом и $\bar{\gamma}_0$, и $\bar{z}_0$ предполагаются (для простоты) детерминированными величинами.

Теперь можно следующим образом сформулировать задачу: построить такую политику формирования оборотных средств, которая бы при заданных значениях $\bar{\gamma}_0$, $\bar{z}_0$, h , δ , L_k , $k = 1, \dots, n$, и известных функциях распределения $F_k(x)$ и $G_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, минимизировала средние полные издержки формирования оборотных средств на всем интервале планирования, т. е. на всех n периодах.

Обозначим через $\bar{W}(\gamma_0, z_0)$ минимум средних полных издержек при заданных γ_0 и z_0 . Таким образом, задача состоит в определении

$$\bar{W}(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0) = \min_S \sum_{k=1}^n W_k(S_k), \quad (7)$$

где минимум берется по всевозможным наборам $S = (S_1, \dots, S_n)$, причем величины S_k подчинены ограничениям (1). Вектор

$$\bar{S}(\gamma_0, z_0) = (\bar{S}_1(\gamma_0, z_0), \dots, \bar{S}_n(\gamma_0, z_0)), \quad (8)$$

являющийся решением задачи (7) при заданных γ_0 и z_0 , будем называть оптимальной политикой формирования оборотных средств. Итак, необходимо найти $\bar{S}(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0)$.

2. Сформулированная задача имеет много общего с задачей оптимального управления запасами [3, гл. 5]. Поэтому используем для ее решения метод динамического программирования, с успехом применявшийся в задачах оптимального управления запасами.

Введем функции $\Phi_k(\gamma_k, z_{k-1})$ — минимальные средние полные издержки, возникающие с k -го по n -й периоды включительно при использовании оптимальной политики формирования оборотных средств и при условии, что к началу k -го периода запас собственных средств равнялся γ_k , а задолженность по кредиту $(1 + \delta)z_{k-1}$. Тогда в соответствии с принципом оптимальности Беллмана можно получить (осредняя по возможным значениям платежей ξ_k и поступлений η_k) рекуррентное соотношение для функций $\Phi_k(\gamma_k, z_{k-1})$

$$\begin{aligned} \Phi_k(\gamma_k, z_{k-1}) = & \min_{\gamma_k \leq S_k \leq \gamma_k + L_k} \left\{ W_k(S_k, z_{k-1}) + \right. \\ & + p_k \left[\int_0^{B_k} dG_k(y) \int_{\min(0, y - R_k)}^{\min(A_k, y - R_k)} \Phi_{k+1}(y - x - R_k, 0) dF_k(x) + \right. \\ & + \left. \int_0^{B_k} dG_k(y) \int_{\max(0, y - R_k)}^{\max(A_k, y - R_k)} \Phi_{k+1}(0, x + R_k - y) dF_k(x) \right] + \\ & + q_k \left[\int_0^{B_k} dG_k(y) \int_{\min(0, -R_k)}^{\min(A_k, -R_k)} \Phi_{k+1}(y - x - R_k, 0) dF_k(x) + \right. \\ & + \left. \int_0^{B_k} dG_k(y) \int_{\max(0, -R_k)}^{\max(A_k, -R_k)} \Phi_{k+1}(y, x + R_k) dF_k(x) \right] \Big\}, \quad k = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$R_k = (1 + \delta)z_{k-1} - S_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Величина R_k , $k = 1, \dots, n$, равна «превышению» задолженности по кредиту в k -м периоде над уровнем собственных средств в этом периоде; очевидно, что «превышение» это может быть как положительной, так и отрицательной величиной.

Для последнего n -го периода имеем

$$\begin{aligned} \Phi_n(\gamma_n, z_{n-1}) = & \min_{\gamma_n \leq S_n \leq \gamma_n + L_n} \left\{ h(S_n + p_n b_n) + \delta z_{n-1} + \right. \\ & + \delta p_n \int_0^{B_n} dG_n(y) \int_{\max(0, y - R_n)}^{\max(A_n, y - R_n)} (x + R_n - y) dF_n(x) + \\ & \left. + \delta q_n \int_{\max(0, -R_n)}^{\max[A_n, -R_n]} (x + R_n) dF_n(x) \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

3. Соотношение (11) не содержит в правой части неизвестных функций; его можно рассматривать как формулировку самостоятельной, статической задачи. Действительно, если γ_n и z_{n-1} считать заданными, то речь идет о принятии только одного решения — выборе такого уровня собственных средств S_n в последнем периоде, чтобы минимизировать издержки в этом периоде, причем, как уже говорилось, к издержкам этого периода относятся и проценты за кредит, взятые в этом периоде.

Предположим, что задача (11) решена, т. е. найдены $\Phi_n(\gamma_n, z_{n-1})$ и $S_n^0(\gamma_n, z_{n-1})$ как функции запаса оборотных средств γ_n к началу n -го периода и кредита z_{n-1} предыдущего периода. Тогда можно наметить следующий путь решения исходной задачи. Подставим найденную функцию $\Phi_n(\gamma_n, z_{n-1})$ в правую часть уравнения (9) при $k = n - 1$. Полученное соотношение не будет содержать в правой части неизвестных функций — мы вновь приходим к статической задаче, правда, несколько более сложного вида, чем задача (11), но, по-видимому, способы решения этих задач не должны различаться. Решив эту задачу, найдем $\Phi_{n-1}(\gamma_{n-1}, z_{n-2})$ и оптимальный уровень собственных средств $S_{n-1}^0(\gamma_{n-1}, z_{n-2})$ как функции запаса γ_{n-1} средств к началу периода и кредита z_{n-2} предыдущего периода. Продолжая этот процесс последовательно для $k = n - 2, \dots, 2, 1$, построим таким образом функции

$$\Phi_{n-2}(\gamma_{n-2}, z_{n-3}), S_{n-2}^0(\gamma_{n-2}, z_{n-3}); \dots; \Phi_1(\gamma_1, z_0), S_1^0(\gamma_1, z_0).$$

Если теперь в $\Phi_1(\gamma_1, z_0)$ и $S_1^0(\gamma_1, z_0)$ подставить заданные начальные условия $\gamma_1 = \bar{\gamma}_0$ и $z_0 = \bar{z}_0$, то найдем

$$\begin{aligned} \bar{W}(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0) &= \Phi_1(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0), \\ \bar{S}_1(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0) &= S_1^0(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0). \end{aligned}$$

Теперь надо найти остальные $(n - 1)$ — y компоненты вектора $\bar{S}(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0)$. Одновременно можно будет построить функции $\bar{W}_k(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0)$ — минимальные полные средние издержки формирования оборотных средств, начиная с k -го периода и кончая n -м, если к началу первого периода запас оборотных средств был равен $\bar{\gamma}_0$, а задолженность по кредиту — $(1 + \delta)\bar{z}_0$. Очевидно, что $\bar{W}_1(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0) = \bar{W}(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0)$.

4. Предположим, что используется оптимальная политика формирования оборотных средств и пусть $\Omega_k(\gamma, z)$ — совместное распределение вероятностей случайных величин γ_k и z_{k-1} , т. е.

$$\Omega_k(\gamma, z) = P\{\gamma_k \leq \gamma, z_{k-1} \leq z\}, \quad k = 1, \dots, n,$$

причем в силу заданных начальных условий

$$\Omega_1(\gamma, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma \geq \bar{\gamma}_0, \quad z \geq \bar{z}_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\bar{W}_k(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0)$, $\bar{S}_k(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0)$ и $\Omega_k(\gamma, z)$ уже найдены и, кроме того, известно, как по $\Omega_k(\gamma, z)$ строить распределение вероятностей $\Omega_{k+1}(\gamma, z)$. Тогда $\bar{W}_{k+1}(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0)$ и $\bar{S}_{k+1}(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0)$ можно определить следующим образом:

$$\bar{W}_{k+1}(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0) = \iint_{\{\Omega_{k+1}\}} \Phi_{k+1}(\gamma, z) d\Omega_{k+1}(\gamma, z), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\bar{S}_{k+1}(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0) = \iint_{\{\Omega_{k+1}\}} S_{k+1}^0(\gamma, z) d\Omega_{k+1}(\gamma, z), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

где $\{\Omega_{k+1}\}$ — область определения функции $\Omega_{k+1}(\gamma, z)$. Таким образом будут построены все компоненты вектора $\bar{S}(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0)$.

5. Перейдем к определению $\Omega_{k+1}(\gamma, z)$ через $\Omega_k(\gamma, z)$. Пусть $\Omega_{k+1}(\gamma, z/u, v)$ — условное совместное распределение вероятностей случайных величин γ_{k+1} и z_k при условии, что $\gamma_k = u$, $z_{k-1} = v$. Тогда для $\gamma \geq 0$, $z \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{k+1}(\gamma, z/u, v) = & p_k \int_{\kappa_k(-z-l_k)}^{\kappa_k(A_k+\gamma-l_k)} dG_k(y) \int_{\max(0, l_k+y-\gamma)}^{\min(A_k, l_k+y+z)} dF_k(x) + \\ & + q_k \int_0^{\min(B_k, \gamma)} dG_k(y) \int_{N_k(l_k)}^{M_k(l_k)} dF_k(x), \quad k = 1, \dots, n-1, \\ & l_k = S_k^0(u, v) - (1 + \delta)v, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_k(x) = & \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ x, & \text{если } 0 \leq x \leq B_k, \\ B_k, & \text{если } x \geq B_k; \end{cases} \\ M_k(l_k) = & \begin{cases} \min(A_k, z + l_k), & \text{если } l_k \leq A_k, \\ \max(A_k, l_k + y - \gamma), & \text{если } l_k \geq A_k; \end{cases} \\ N_k(l_k) = & \begin{cases} \min(0, z + l_k), & \text{если } l_k \leq 0, \\ \max(0, l_k + y - \gamma), & \text{если } l_k \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь по формуле полной вероятности находим

$$\Omega_{k+1}(\gamma, z) = \iint_{(\Omega_k)} \Omega_{k+1}(\gamma, z/u, v) d\Omega_k(u, v), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Зная распределение $\Omega_k(\gamma, z)$, можно найти распределение величины z_k — кредита k -го периода и распределение γ_k — величины запаса собственных средств к началу k -го периода. Если эти распределения обозначить

через $D_k(z)$ и $H_k(\gamma)$, соответственно, то получим

$$D_k(z) = \int_{\{\gamma_{k+1}\}} d\Omega_{k+1}(\gamma, z),$$

$$k = 1, \dots, n-1,$$

$$H_{k+1}(\gamma) = \int_{\{z_k\}} d\Omega_{k+1}(\gamma, z),$$

где $\{\gamma_{k+1}\}$ — область возможных значений случайной величины γ_{k+1} , а $\{z_k\}$ — область возможных значений случайной величины z_k .

По распределениям $D_k(z)$ и $H_{k+1}(\gamma)$ можно найти $\bar{z}_k$ — средний размер кредита, необходимого предприятию в k -м периоде, и $\bar{\gamma}_k$ — средний запас собственных средств к началу k -го периода при оптимальной политике формирования оборотных средств. Очевидно, что $\bar{z}_k$ и $\bar{\gamma}_k$ будет зависеть от начальных условий $\bar{\gamma}_0$ и $\bar{z}_0$. Теперь, так как оптимальный уровень $\bar{S}_k(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0)$ собственных средств уже определен, можно найти величину

$$r_k(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0) = \bar{S}_k(\bar{\gamma}_0, \bar{z}_0) - \bar{\gamma}_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

которая представляет собой средний размер того прироста собственных оборотных средств, который необходимо предприятию в k -м периоде.

6. Вернемся к статической задаче (11) и запишем ее в виде

$$\Phi_n(\gamma_n, z_{n-1}) = \min_{\gamma_n \leq S_n \leq \gamma_n + L_n} \Psi(\gamma_n, z_{n-1}, S_n), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n) = & h(S_n + p_n b_n) + \delta z_{n-1} + \\ & B_n \max(A_n, y - R_n) \\ & + \delta p_n \int_0^\infty dG_n(y) \int_{\max(0, y - R_n)}^{\max(A_n, -R_n)} (x + R_n - y) dF_n(x) + \\ & + \delta q_n \int_{\max(0, -R_n)}^{\max(A_n, -R_n)} (x + R_n) dF_n(x); \\ & R_n = (1 + \delta)z_{n-1} - S_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения $\Phi_n(\gamma_n, z_{n-1})$ необходимо найти решения (если они есть) уравнения

$$\frac{\partial \Psi_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n)}{\partial S_n} = 0 \quad (14)$$

в интервале $\gamma_n \leq S_n \leq \gamma_n + L_n$. Вид функции $\Psi_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n)$, а следовательно, и уравнения (14) зависят от расположения на числовой оси величин A_n, B_n, L_n и R_n . Если A_n, B_n и L_n — положительны по своему определению, то R_n может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Будем предполагать, что $A_n \geq B_n + L_n$, $B_n \geq L_n$, другие случаи рассматриваются точно так же. Тогда вид уравнения (14) зависит от того, в какой из следующих пяти интервалов попадает R_n (первый и последний интервалы неограничены): $R_n \leq -A_n$; $-A_n \leq R_n \leq -A_n + B_n$; $-A_n + B_n \leq R_n \leq 0$; $0 \leq R_n \leq B_n$; $R_n \geq B_n$.

Рассмотрим уравнение (14), например, в первом и втором интервалах изменения R_n . Исследование других возможностей не внесет никаких осложнений. Предположим, что распределения $F_n(x)$ и $G_n(x)$ обладают плотностями $f_n(x)$ и $g_n(x)$ соответственно.

а) Пусть $R_n \leq -A_n$. Отсюда, если вспомнить, что $\gamma_n \leq S_n \leq \gamma_n + L_n$, следует

$$\gamma_n \geq A_n + (1 + \delta)z_{n-1}. \quad (15)$$

Это означает, что запас собственных средств к началу n -го периода таков, что полностью удовлетворяет потребности этого периода в оборотных средствах — для оплаты платежей и погашения задолженности по кредиту. В этом случае

$$\Psi_n(\gamma_n, z_{n-1}) = h(S_n + p_n b_n) + \delta z_{n-1} \quad (16)$$

и очевидно, что пополнение запаса γ_n нецелесообразно. Тогда следует

$$\begin{cases} \Phi_n(\gamma_n, z_{n-1}) = h(\gamma_n + p_n b_n) + \delta z_{n-1}, \\ S_n^0(\gamma_n, z_{n-1}) = \gamma_n. \end{cases} \quad (17)$$

б) Пусть $-A_n \leq R_n \leq -A_n + B_n$. Это приводит к неравенству $A_n + (1 + \delta)z_{n-1} - B_n \leq S_n \leq A_n + (1 + \delta)z_{n-1}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n)}{\partial S_n} = h - \delta \left\{ p_n \int_0^{A_n + R_n} g_n(y) dy \int_{y - R_n}^{A_n} f_n(x) dx + \right. \\ \left. + q_n \int_{-R_n}^{A_n} f_n(x) dx \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n)}{\partial S_n^2} = \delta \left\{ p_n \int_0^{A_n + R_n} g_n(y) f_n(y - R_n) dy + q_n \bar{f}_n(-R_n) \right\}. \quad (19)$$

Уравнение (14) теперь имеет вид

$$\frac{h}{\delta} = p_n \int_0^{A_n + R_n} g_n(y) dy \int_{y - R_n}^{A_n} f_n(x) dx + q_n \int_{-R_n}^{A_n} f_n(x) dx. \quad (20)$$

Если $h \geq \delta$, то из (18) следует, что в данном случае пополнять начальный запас нет смысла и $S_n^0(\gamma_n, z_{n-1}) = \gamma_n$.

Если же $h < \delta$, то, принимая во внимание (18) и (19), можно сформулировать следующие достаточные условия существования единственного решения уравнения (20)

$$f_n(x) > 0 \text{ для всех } x \in (0, A_n),$$

$$\frac{h}{\delta} < p_n \int_0^{B_n} g_n(y) dy \int_{y - B_n + A_n}^{A_n} f_n(x) dx + q_n \int_{A_n - B_n}^{A_n} f_n(x) dx. \quad (21)$$

Последнее условие обеспечивает отрицательность первой производной функции $\Psi_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n)$ на левом конце интервала допустимых значений S_n , т. е. при $S_n = A_n + (1 + \delta)z_{n-1} - B_n$. Из (18) следует, что при $S_n = A_n + (1 + \delta)z_{n-1}$ эта производная равна $h > 0$.

Из сказанного вытекает, что в рассматриваемом случае оптимальный уровень оборотных средств определяется следующим образом

$$S_n^0(\gamma_n, z_{n-1}) = \begin{cases} \gamma_n + L_n, & \text{если } \gamma_n + L_n \leq \bar{S}, \\ \bar{S}, & \text{если } \gamma_n \leq \bar{S} \leq \gamma_n + L_n, \\ \gamma_n, & \text{если } \gamma_n > \bar{S}, \end{cases} \quad (22)$$

где $\bar{S}$ — единственное решение уравнения (20) в данном интервале изменения S_n .

4. Некоторые частные случаи и возможные обобщения. 1. Рассмотрим случай, когда средства от реализации готовой продукции всегда поступают в конце периода, т. е. $p_k = 0$, $q_k = 1$, $k = 1, \dots, n$. Тогда вместо уравнений (9) и (11) (сохраняя предположение о существовании плотностей $f_n(x)$ и $g_n(x)$) получим соответственно

$$\begin{aligned} \Phi_k(\gamma_k, z_{k-1}) &= \min_{\gamma_k \leq S_k \leq \gamma_k + L_k} \left\{ hS_k + \delta z_{k-1} + \right. \\ &+ \int_0^{B_k} g_k(y) dy \int_{\min(0, -R_k)}^{\min(A_k, -R_k)} \Phi_{k+1}(y - x - R_k, 0) f_k(x) dx + \\ &+ \left. \int_0^{B_k} g_k(y) dy \int_{\max(0, -R_k)}^{\max(A_k, -R_k)} \Phi_{k+1}(y, x + R_k) f_k(x) dx \right\}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ \Phi_n(\gamma_n, z_{n-1}) &= \min_{\gamma_n \leq S_n \leq \gamma_n + L_n} \left\{ hS_n + \delta z_{n-1} + \right. \\ &+ \delta \int_{\max(0, -R_n)}^{\max(A_n, -R_n)} (x + R_n) f_n(x) dx \left. \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение (24) имеет различный вид в зависимости от того, в каком из следующих трех интервалов лежит R_n : $R_n \leq -A_n$; $-A_n \leq R_n \leq 0$; $R_n \geq 0$.

- а) Случай $R_n \leq -A_n$ исследован в предыдущем параграфе для $p_n \geq 0$.
б) Если $-A_n \leq R_n \leq 0$, т. е. $(1 + \delta)z_{n-1} \leq S_n \leq (1 + \delta)z_{n-1} + A_n$,

то

$$\Phi_n(\gamma_n, z_{n-1}) = \min_{\gamma_n \leq S_n \leq \gamma_n + L_n} \tilde{\Phi}_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n), \quad (25)$$

где

$$\tilde{\Phi}_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n) = hS_n + \delta z_{n-1} + \delta \int_{-R_n}^{A_n} (x + R_n) f_n(x) dx. \quad (26)$$

Из (26) получим

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n)}{\partial S_n} = h - \delta \int_{-R_n}^{A_n} f_n(x) dx, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n)}{\partial S_n^2} = \delta f_n(-R_n). \quad (28)$$

Из (27) вытекает

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n)}{\partial S_n} = h > 0 \quad \text{при } S_n = (1 + \delta)z_{n-1} + A_n,$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_n(\gamma_n, z_{n-1}, S_n)}{\partial S_n} = h - \delta \quad \text{при } S_n = (1 + \delta)z_{n-1}.$$

Таким образом, если $h \geq \delta$, то пополнять запас γ_n не следует и $S_n^0(\gamma_n, z_{n-1}) = \gamma_n$.

Это подтверждает тот очевидный вывод, что если плата за собственные оборотные средства больше кредитной ставки, то надо в максимально допустимой мере использовать кредит.

Если же $h < \delta$ и $f_n(x) > 0$ для всех $x \in (0, A_n)$, то оптимальный уровень $S_n^0(\gamma_n, z_{n-1})$ определяется точно так же, как и в (22), только $\bar{S}$ теперь — единственное решение уравнения

$$\frac{h}{\delta} = \int_{S_n - (1+\delta)z_{n-1}}^{A_n} f_n(x) dx. \quad (29)$$

Предположим для простоты, что в $(n-1)$ -м периоде потребности в кредите не возникало, т. е. что $z_{n-1} = 0$. Тогда уравнение (29) имеет простую экономическую интерпретацию. Действительно, в этом случае правая часть уравнения (29) есть вероятность того, что размер платежей превысит уровень собственных средств, т. е. возникнет потребность в кредите. Таким образом, если $\gamma_n \leq \bar{S} \leq \gamma_n + L_n$, то уровень собственных оборотных средств должен быть таким, чтобы вероятность того, что понадобится кредит, равнялась отношению платы за собственные средства к ставке за кредит. Если же $\bar{S} \geq \gamma_n + L_n$, то следует брать максимально возможное пополнение уровня собственных средств; если $\bar{S} \leq \gamma_n$, то пополнять запас не надо.

в) В том случае, когда $R_n \geq 0$, из (24) получим

$$\Phi_n(\gamma_n, z_{n-1}) = \min_{\gamma_n \leq S_n \leq \gamma_n + L_n} \{(h - \delta)S_n + \delta[a_n + (2 + \delta)z_{n-1}]\}, \quad (30)$$

где $a_n = \int_0^{A_n} x f_n(x) dx$ — средний размер платежных обязательств в n -м периоде.

Из (30) следует, что

$$S_n^0(\gamma_n, z_{n-1}) = \begin{cases} \gamma_n, & \text{если } h \geq \delta, \\ \gamma_n + L_n, & \text{если } h < \delta. \end{cases}$$

2. Предположим теперь, что средства от реализации готовой продукции поступают всегда в начале периода, т. е. что $q_k = 0$, $p_k = 1$, $k = 1, \dots, n$. В этом случае $\Phi_k(\gamma_k, z_{k-1})$ определена лишь тогда, когда хотя бы один из аргументов равен нулю, так как при сделанных предположениях невозможно, чтобы к началу какого-либо периода имелся и запас собственных средств, и задолженность по кредиту. Поэтому вместо $\Phi_k(\gamma_k, z_{k-1})$ можно ввести функцию одной переменной $\varphi_k(u_k)$ — минимальные средние полные издержки формирования оборотных средств с k -го по n -й период включительно, возникающие при оптимальной политике и при условии, что запас собственных средств к началу k -го периода равен $\alpha_k = \max(0, u_k)$, а задолженность по кредиту $(1 + \delta)\beta_k = (1 + \delta)\max(0, -u_k)$. Таким образом, $\varphi_k(u_k)$ определена на всей числовой оси. Вместо уравнений (9) и (11)

ПОЛУЧИМ СООТВЕТСТВЕННО

$$\begin{aligned} \varphi_k(u_k) = & \min_{\alpha_k \leq S_k \leq \alpha_k + L_k} \left\{ h(S_k + b_k) + \delta \beta_k + \right. \\ & \left. + \int_0^{B_k} g_k(y) dy \int_0^{A_k} \varphi_{k+1}(S_k + y - x - (1 + \delta) \beta_k) f_k(x) dx \right\}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ \varphi_n(u_n) = & \min_{\alpha_n \leq S_n \leq \alpha_n + L_n} \left\{ h(S_n + b_n) + \delta \beta_n + \right. \\ & \left. + \delta \int_0^{B_n} g_n(y) dy \int_{\max(0, S_n + y - (1 + \delta) \beta_n)}^{\max(A_n, S_n + y - (1 + \delta) \beta_n)} (x + (1 + \delta) \beta_n - S_n - y) f_n(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнение (32) можно исследовать точно так же, как и уравнение (11).

3. В рассмотренной модели предполагалось, что кредит выдается ровно на один период, т. е. в следующем периоде он должен быть возвращен вместе с соответствующими процентами. Можно ввести любой срок выдачи кредита, кратный целому числу периодов; модель при этом, естественно, станет более сложной. Очевидно, что при сохранении прочих допущений предприятию будет невыгодно возвращать кредит раньше срока, даже если такая возможность представится.

4. Данная модель может быть использована при планировании потребности предприятия в оборотных средствах. Если считать, что к этому моменту уже известны планы производства и снабжения, то это будет означать, что входная информация для модели имеется. С другой стороны, можно считать, что одна из основных функций оборотных средств состоит в том, чтобы обеспечить реализацию упомянутых планов с наименьшими возможными издержками. А отсюда уже следует, что при этих предположениях оптимальная политика формирования оборотных средств превращается, может быть с определенными оговорками, в оптимальную политику управления оборотными средствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Б. Барнгольц. Оборотные средства промышленности. М., «Финансы», 1965.
2. П. Г. Бунич, В. Л. Перламутров, Л. Х. Соколовский. Экономико-математическая модель планирования оборотных средств. План. хоз-во, 1969, № 6.
3. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

Поступила в редакцию
30 XII 1969